

PLENARÜBUNG

Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Bemerkung: Dieser Aufschrieb deckt nicht alles ab, was in den Plenarübungen vom 20.12.16 und 10.01.17 behandelt wurde. Am 20.12. haben wir den *Integralsatz von Gauß* aus dem in der Vorlesung bewiesenen *Stokes'schen Satz* bewiesen. Am 01.01. haben wir gezeigt, dass zu jeder k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n eine eindeutig bestimmte k -Form existiert, deren Rückzüge entlang jeder Karte durch die Gram'sche Determinante der Parametrisierungen beschrieben wird.

Dieser Aufschrieb ist eine Wiederholung der in der Vorlesung behandelten Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten. Es werden die wichtigsten Definitionen wiederholt und einige ergänzende Beispiele gegeben.

Differentialformen

Lemma 1 Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension. Seien $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$, dann gilt für beliebige Vektoren v_1, \dots, v_k :

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \det((\phi_i(v_j))_{i,j})$$

Beweis. Gleichung (19.36) im Skript. □

Theorem 2 Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $T: V \rightarrow V$ linear. Dann gilt

$$T^*\omega = \det(T) \cdot \omega \quad \text{für alle } \omega \in \bigwedge^n V^*.$$

Beweis. Nach Gleichung (19.38) gilt

$$\dim \bigwedge^n V^* = \binom{n}{n} = 1.$$

Sei ω_0 ein Erzeuger von $\bigwedge^n V^*$, d.h. $\bigwedge^n V^* = \mathbb{R} \cdot \omega_0$. Dann gilt insbesondere $T^*\omega_0 = c \cdot \omega_0$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Ein beliebiges Element $\omega \in \bigwedge^n V^*$ hat somit die Form $\omega = \lambda\omega_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$T^*\omega = \lambda T^*\omega_0 = \lambda c\omega_0 = c\omega.$$

Wir müssen also zeigen, dass $c = \det(T)$. Sei hierzu e_1, \dots, e_n eine Basis von V und $\epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ die dazugehörige duale Basis von V^* . Dann folgt

$$\begin{aligned} c &= c \cdot \det((\epsilon^i(e_j))_{i,j}) = c\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(e_1, \dots, e_n) \\ &= (T^*(\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n))(e_1, \dots, e_n) = \epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(Te_1, \dots, Te_n) = \det(T), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Zur Wiederholung die Definiton von Differentialformen (Def. 23.1 im Skript):

Definition 3 (Differentialformen) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine (stetige, differenzierbare, etc.) Differentialform vom Grad k ist eine (stetige, differenzierbare) Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \bigwedge^k (\mathbb{R}^n)^*.$$

Eine k -Differentialform ordnet also jedem Punkt $x \in U$ in stetiger(, differenzierbarer, etc.) Weise einer k -Form zu. Die Menge aller k -Differentialformen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet. Für ein $\omega \in \Omega^k(U)$ existieren $\binom{n}{k}$ Funktionen $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle Punkte $x \in U$ gilt:

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x) \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wie wir in der Schlussbemerkung zu §19 gesehen haben, lässt sich eine k -Form als (orientierte) Volumenform interpretieren. Hinzu kommt das Transformationsverhalten von alternierenden Formen, das wir in Lemma 1 und Satz 2 festgehalten haben (vgl. mit dem Transformationssatz für Integrale). Dies gibt eine Motivation dazu, k -Differentialformen als Integranden zu verwenden.

Definition 4 (Rückzug) Sei $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\Phi: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar. Dann ist für alle $x \in V$ die Jacobi-Matrix von Φ in x ,

$$D\Phi(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Der Rückzug Φ^* ist die von Φ induzierte (contravariante) Abbildung auf der Menge der Differentialformen in jedem Grad k :

$$\Phi^*: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(V), \quad \text{mit } (\Phi^*(\omega)(x))(v_1, \dots, v_k) := \omega(\Phi(x))(D\Phi(x)(v_1), \dots, D\Phi(x)(v_k)),$$

für alle $x \in V$ sowie $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkung 5 (Zum Rückzug) (a) Man beachte, dass der Rückzug immer *graderhaltend* ist, d.h. eine k -Form wird immer auf eine k -Form abgebildet.

(b) Sei $\omega \in \Omega^k(U)$ eine Differentialform auf U , gegeben durch

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Nach Aufgabe 10.1 hat somit $\Phi^*(\omega)$ bei $x \in V$ die Form (sorry für die sperrige Formel, weiter unten wird ein Beispiel eines Rückzugs berechnet):

$$(\Phi^*(\omega))(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_k=1}^m \omega_{i_1, \dots, i_k}(\Phi(x)) \cdot \frac{\partial \Phi^{i_1}}{\partial x^{\nu_1}}(x) \cdot \dots \cdot \frac{\partial \Phi^{i_k}}{\partial x^{\nu_k}}(x) \times dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_k}.$$

Hierbei transformieren sich die 1-Differentialformen dx^i gemäß

$$(\Phi^*(dx^i))(x) = \sum_{\nu=1}^m \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^\nu}(x) \cdot dx^\nu. \tag{1}$$

(c) Im Fall von $n = m = k$ folgt nach Theorem 2 die folgende Transformationsformel:

$$(\Phi^*(\omega))(x) = \det(D\Phi(x))\omega(\Phi(x)). \quad (2)$$

Wie bereits weiter oben erwähnt, ist dieses Transformationsverhalten ausschlaggebend dafür, dass sich Differentialformen als „natürliche Integranden“ für die Integration auf Mannigfaltigkeiten erweisen.

Beispiel 6 (Zum Rückzug) Sei $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit

$$\gamma(u, v) := \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix},$$

und sei $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Wir bestimmen $\gamma^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} \gamma^*(\omega) &= \gamma^*(x) \cdot \gamma^*(dy) \wedge \gamma^*(dz) + \gamma^*(y) \cdot \gamma^*(dz) \wedge \gamma^*(dx) + \gamma^*(z) \cdot \gamma^*(dx) \wedge \gamma^*(dy) \\ &= \cos(u) \cos(v) \cdot \gamma^*(dy) \wedge \gamma^*(dz) \\ &\quad + \sin(u) \cos(v) \cdot \gamma^*(dz) \wedge \gamma^*(dx) \\ &\quad + \sin(v) \cdot \gamma^*(dx) \wedge \gamma^*(dy). \end{aligned}$$

Für $\gamma^*(dx)$, $\gamma^*(dy)$ und $\gamma^*(dz)$ erhalten wir nach Gl. (1)

$$\begin{aligned} \gamma^*(dx) &= -\sin(u) \cos(v) du - \cos(u) \sin(v) dv, \\ \gamma^*(dy) &= \cos(u) \cos(v) du - \sin(u) \sin(v) dv, \\ \gamma^*(dz) &= \cos(v) dv. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $du \wedge dv = -dv \wedge du$ und $du \wedge du = dv \wedge dv = 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \gamma^*(\omega) &= \cos(u) \cos(v) \cdot (\cos(u) \cos(v) du - \sin(u) \sin(v) dv) \wedge (\cos(v) dv) \\ &\quad + \sin(u) \cos(v) \cdot (\cos(v) dv) \wedge (-\sin(u) \cos(v) du - \cos(u) \sin(v) dv) \\ &\quad + \sin(v) \cdot (-\sin(u) \cos(v) du - \cos(u) \sin(v) dv) \wedge (\cos(u) \cos(v) du - \sin(u) \sin(v) dv) \\ &= \cos(u)^2 \cos(v)^3 du \wedge dv \\ &\quad - \sin(u)^2 \cos(v)^3 dv \wedge du \\ &\quad + \sin(u)^2 \sin(v)^2 \cos(v) du \wedge dv - \cos(u)^2 \sin(v)^2 \cos(v) dv \wedge du \\ &= (\cos(u)^2 \cos(v)^3 + \sin(u)^2 \cos(v)^3 + \sin(u)^2 \sin(v)^2 \cos(v) \\ &\quad + \cos(u)^2 \sin(v)^2 \cos(v)) du \wedge dv \\ &= \cos(v) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Somit ist $\gamma^*(\omega) = \cos(v) du \wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.

Definition 7 (Cartan-Ableitung) Die Cartan-Ableitung von Differentialformen ist eine Abbildung

$$d: \Omega^{i-1}(U) \rightarrow \Omega^i(U), \quad i = 0, \dots, n-1,$$

die eine $(i-1)$ -Form ω auf eine i -Form $d\omega$ gemäß folgender Vorschrift abbildet: Ist $\omega \in \Omega^0(U)$ (also eine differenzierbare Funktion), so ist $d\omega$ gegeben durch die 1-Form

$$d\omega(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(x) dx^\nu.$$

Ist $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U)$ eine k -Form, so ist

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(\omega_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^{k+1}(U).$$

Bemerkung 8 (Zur Cartan-Ableitung) Wir fassen hier die wichtigsten Eigenschaften der Cartan-Ableitung zusammen:

1. Für $\omega \in \Omega^k(U)$ und $\eta \in \Omega^l(U)$ gilt die Leibniz-Regel:

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta).$$

2. Für alle k -Formen $\omega \in \Omega^k(U)$ ist $d(d\omega) = 0 \in \Omega^{k+2}(U)$.

3. Sei $\Phi: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar und Φ^* der Rückzug von Φ . Dann kommutiert die Cartan-Ableitung d mit Φ^* , d.h. für $\omega \in \Omega^k(U)$ gilt

$$d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega).$$

Beispiel 9 (Differentialformen im \mathbb{R}^3 (vgl. auch Beispiel 23.4)) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $\mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R}^3)$ der Raum der glatten Vektorfelder auf U . $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{C}(U; \mathbb{R}^3)$ ordnen wir die Differentialformen vom Grad 1 und 2 zu:

$$\eta_F := f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \omega_F := f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy.$$

Auf diese Weise erhalten wir Isomorphismen von \mathbb{R} -Vektorräumen von $\eta: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^1(U)$ und $\omega: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^2(U)$. Nun ist die Cartan-Ableitung von η_F :

$$\begin{aligned} d\eta_F &= (\partial_x f_1 dx + \partial_y f_1 dy + \partial_z f_1 dz) \wedge dx \\ &\quad + (\partial_x f_2 dx + \partial_y f_2 dy + \partial_z f_2 dz) \wedge dy \\ &\quad + (\partial_x f_3 dx + \partial_y f_3 dy + \partial_z f_3 dz) \wedge dz \\ &= (\partial_y f_3 - \partial_z f_2) dy \wedge dz \\ &\quad + (\partial_z f_1 - \partial_x f_3) dz \wedge dx \\ &\quad + (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) dx \wedge dy \\ &= \omega_{\text{rot}(F)}. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir für die Cartan-Ableitung von ω_F :

$$\begin{aligned} d\omega_F &= \partial_x f_1 dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y f_2 dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z f_3 dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \text{div}(F) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Die Cartan-Ableitung einer glatten Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U; \mathbb{R})$ haben wir offenbar $df = \eta_{\text{grad}(f)}$. Da $d \circ d \equiv 0$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} 0 &= d(df) = d(\eta_{\text{grad}(f)}) = \omega_{\text{rot}(\text{grad}(f))}, \text{ sowie} \\ 0 &= d(d\eta_F) = d(\omega_{\text{rot}(F)}) = \text{div}(\text{rot}(F)) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

(Natürlich lassen sich diese Relationen auch per Hand ausrechnen) Ergänzend hierzu sind die Bemerkungen zum *Poincaré-Lemma* auf Seite 190 im Skript.

Integration

Wir betrachten k -dimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n mit Rand.

Definition 10 (orientierbare Untermannigfaltigkeit) Sei M eine kompakte, k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . M heißt *orientierbar*, falls es einen Atlas gibt, sodass für alle Kartenwechsel gilt:

$$\det(D(\phi_\iota \circ \phi_\kappa^{-1})) > 0 \quad \text{für alle zulässigen } x.$$

Man sagt, M ist *orientiert*, falls eine Atlas festgelegt wurde, für den obige Bedingung erfüllt ist.

Das bedeutet, dass die Orientierung einer (orientierbaren) Mannigfaltigkeit von der Wahl der Karten abhängt. Das heißt wiederum, bei der Wahl einer Parametrisierung entscheidet man sich gleichzeitig für eine Orientierung:

Definition 11 (Integral einer Differentialform) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \Omega^n(U)$, d.h. ω hat die Form $\omega(x) = f(x) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Wir definieren das Integral von ω über U durch

$$\int_U \omega := \int_U f(x) \, d(x^1, \dots, x^n),$$

falls das rechte Integral existiert. Man beachte, dass eine Integration nur über top-dimensionale Differentialformen möglich ist (ist $U \subset \mathbb{R}^n$ so lassen sich nur)

Lemma 12 (Orientierung und Vorzeichen) Seien $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^k$ offen und $U \subset \mathbb{R}^n$, sowie $\gamma_i: V_i \rightarrow U$ zwei differenzierbare Abbildungen, welche homöomorph auf ihr jeweiliges Bild sind und sodass $\gamma_1(V_1) = \gamma_2(V_2) =: M$. γ_i induzieren somit Orientierungen auf M , die wir mit M_i bezeichnen. Sei $\omega \in \Omega^k(U)$. Dann gilt entweder

$$\int_{M_1} \omega = \int_{M_2} \omega, \quad \text{falls } \det(D(\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(x)) > 0 \text{ für alle } x \in V_2,$$

oder

$$\int_{M_1} \omega = - \int_{M_2} \omega, \quad \text{falls } \det(D(\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(x)) < 0 \text{ für alle } x \in V_2,$$

falls die Integrale existieren.

Beweis. (Seien ohne Einschränkung alle involvierten Mengen zusammenhängend. Falls sie es nicht sein sollten ändert sich obige Aussage nicht, da das Vorzeichen $\xi \mapsto \text{sgn}(\xi)$ eine diskrete, stetige Funktion ist für $\xi \neq 0$ und damit konstant auf Zusammenhangskomponenten.)

Wir setzen

$$T_{12} := \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2: V_2 \rightarrow V_1$$

und rechnen:

$$\gamma_2^*(\omega)(x) = (\gamma_1 \circ T_{12})^*(\omega)(x) = T_{12}^*(\gamma_1^*(\omega))(x) \stackrel{\text{Gl. (2)}}{=} \det(DT_{12}(x)) \gamma_1^*(\omega)(T_{12}(x)).$$

Da $\gamma_i^*(\omega) \in \Omega^k(V_i)$ top-dimensionale Formen sind, lassen sie sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}\gamma_1^*(\omega) &= f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k, \text{ und} \\ \gamma_2^*(\omega) &= g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.\end{aligned}$$

Wir erhalten mit obiger Rechnung also die Relation

$$g(x) = \det(DT_{12}(x))f(T_{12}(x)).$$

Wir nehmen nun an, dass g über V_2 integrierbar ist. Äquivalent zu dieser Annahme ist, dass f über V_1 integrierbar ist nach dem *Transformationssatz*.

$\det(DT_{12}(x)) > 0$, d.h. die Kartenabbildungen sind gleich orientiert: Nach Def. 11 und der *Transformationsformel* gilt somit

$$\int_{M_2} \omega = \int_{V_2} g dx = \int_{V_2} f(T_{12}(x)) |\det(DT_{12}(x))| dx = \int_{V_1} f(y) dy = \int_{M_1} \omega.$$

$\det(DT_{12}(x)) < 0$, d.h. die Kartenabbildungen sind entgegengesetzt orientiert: Nach Def. 11 und der *Transformationsformel* gilt somit

$$\int_{M_2} \omega = \int_{V_2} g dx = - \int_{V_2} f(T_{12}(x)) |\det(DT_{12}(x))| dx = - \int_{V_1} f(y) dy = - \int_{M_1} \omega.$$

□

Beispiel 13 Wir greifen die 2-Form aus Beispiel 6 erneut auf. Sei $\gamma_1 := \gamma$ aus obigem Beispiel und $\gamma_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung gegeben durch $\gamma_2(v, u) = \gamma_1(u, v)$ (wir tun nichts anderes als die Argumente zu vertauschen!) und sei $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Aus Beispiel 6 wissen wir, dass $\gamma_1^*(\omega) = \cos(v)du \wedge dv$. Somit ist

$$\gamma_2^*(\omega)(v, u) = \det(D(T_{12}(v, u)))\gamma_1^*(\omega)(T_{12}(v, u)) = -\gamma_1^*(\omega)(u, v).$$

Sei $U_1 := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $U_2 := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$. $\gamma_1|_{U_1}$ und $\gamma_2|_{U_2}$ parametrisieren somit jeweils die Kugeloberfläche S^2 (zumindest fast vollständig). Somit gilt für die Integrale (gemäß Def. 11):

$$\int_{M_2} \omega = \int_{U_2} -\cos(v) d(v, u) = -4\pi$$

und

$$\int_{M_1} \omega = \int_{U_1} \cos(v) d(u, v) = 4\pi.$$

In der Vorlesung haben wir für das Integral über Untermannigfaltigkeiten die Partition der 1 gebraucht, in der Praxis erweist sich das aber als sehr schwer. Wie im vorherigen Beispiel angedeutet, reicht es auch die Mannigfaltigkeit „fast überall“ zu parametrisieren. In diesem Kontext müsste man nun den Begriff „fast überall“ klar definieren – dazu fehlt uns aber die Zeit. Das Schlagwort hier ist „Hausdorff-Nullmenge“. Die Idee ist, wie beim Lebesgue-Integral auch, einfach eine gewisse Menge aus der Integration auszuschließen, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Im Fall der 2-Sphäre ist das gerade eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Aus Dimensionsgründen wird diese Menge also nichts zum Integral beitragen.

Beispiel 14 Sei

$$\gamma: (-1, 1) \times (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (h, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} (1 + |h|) \sin(\phi) \\ (1 + |h|) \cos(\phi) \\ h \end{pmatrix}, \quad \gamma((-1, 1) \times (-\pi, \pi)) =: M$$

Anschaulich handelt es sich hier um die Aussenfläche einer leeren Sanduhr ohne Boden und Deckel. (Man mache sich dies an einer Skizze klar). Achtung: γ parametrisiert hier keine Untermannigfaltigkeit, bei $h = 0$ ist γ nicht differenzierbar! Trotzdem wollen wir eine Differentialform über M integrieren: Die Kreislinie $\gamma(\{0\} \times (-\pi, \pi])$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit, aber die Komponenten

$$\begin{aligned} M_1 &:= \gamma((-1, 0) \times (-\pi, \pi]), \text{ und} \\ M_2 &:= \gamma((0, 1) \times (-\pi, \pi]) \end{aligned}$$

sind 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 . Sei $\omega := z dx \wedge dy$ und $\gamma_1 := \gamma|_{M_1}$, sowie $\gamma_2 := \gamma|_{M_2}$. Wir setzen:

$$\int_M \omega := \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega.$$

Mit

$$\begin{aligned} \gamma_1^*(\omega) &= h(1 - h) dh \wedge d\phi, \text{ und} \\ \gamma_2^*(\omega) &= -h(1 + h) dh \wedge d\phi, \end{aligned}$$

folgt damit

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_{(-1,0) \times (-\pi,\pi)} h(1-h) d(h, \phi) + \int_{(0,1) \times (-\pi,\pi)} -h(1+h) d(h, \phi) \\ &= 4\pi \int_{(0,1)} -h(1+h) dh \\ &= -\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$