



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

SKRIPT ZUR VORLESUNG
DIFFERENTIALGEOMETRIE I

gehalten an der
Universität Heidelberg
im
Sommersemester 2017
von
Johannes Walcher

INHALTSVERZEICHNIS

1	GRUNDLAGEN	3
§1	Mannigfaltigkeiten	4
§2	Differenzierbare Funktionen	14
§3	Der Tangentialraum	17
§4	Abbildungen von konstantem Rang	26
§5	Vektorfelder und Flüsse	35
§6	Vektorbündel 1	48
2	RIEMANNSCHE GEOMETRIE	59
§7	Der metrische Tensor	64
§8	Geodäten	73
§9	Krümmung	93
§10	Lie-Gruppen	111

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

GRUNDLAGEN

Die Differentialgeometrie untersucht geometrische Strukturen mit Hilfe der Differentialrechnung.

- Hierbei meint “Geometrie” in einer zu präzisierenden Weise die Beschreibung räumlicher Gebilde und ihrer Verhältnisse zueinander. Sie baut dabei in der Regel auf Konzepten der Topologie auf (Ausnahmen: synthetische Geometrie und andere auf Anordnung gestützte Zugänge), setzt aber (anders als der Name vermuten lässt) zunächst keinen Begriff der “(Abstands-)Messung” voraus.
- “Differentialrechnung” ist im wesentlichen die aus der Analysis bekannte mehrdimensionale Differentiation im \mathbb{R}^n , allerdings noch mit einer gehörigen Portion linearer Algebra angereichert. Gewöhnliche Differentialgleichungen spielen sowohl bei der Motivation als auch bei der technischen Durchführung eine wesentliche Rolle. Zur Integration genügt der Riemannsche Begriff.

Diese Vorlesung verfolgt zwei Ziele.

- Das erste ist die Entwicklung des modernen Apparats der *differentialgeometrischen Sprache*. Dabei definieren wir Begriffe wie Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Abbildungen, Tangentialraum und Tensorfelder, Vektorbündel und Zusammenhänge, und illustrieren sie in Beispielen. Dies führt zu einer Klärung der für eine sinnvolle Unterhaltung notwendigen Ideen.
- Das zweite Ziel der Vorlesung ist die Vorstellung der *Riemannschen Geometrie* als zentrales Beispiel für eine zusätzliche Struktur auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (nämlich der Metrik bzw. des metrischen Tensors). Im Vergleich zu anderen “Geometrien”, die mit Hilfe der Differentialrechnung untersucht werden (wie zum Beispiel: symplektische Geometrie, Kontaktgeometrie, Finslergeometrie, komplexe/Kähler Geometrie), ist die Riemannsche Geometrie am engsten an die vertraute euklidische Anschauung angelehnt (und kann in gewisser Weise sogar aus ihr hergeleitet werden). Darüber hinaus ist sie aber ein wichtiges Hilfsmittel und Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen. Insbesondere spielt die (pseudo-)Riemannsche Geometrie eine wichtige Rolle zur Beschreibung der Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wir wollen diese “physikalischen” Anwendungen der Riemannschen Geometrie (soll heißen: alle dynamischen Aspekte und solche, für die wir partielle Differentialgleichungen benötigen würden) hier zunächst nicht weiterverfolgen, so dass uns im letzten Drittel des Semesters noch etwas Zeit übrig bleiben sollte.

- Mit einigen Sätzen aus der globalen Riemannschen Geometrie wollen wir ihre Nützlichkeit für die Untersuchung der Topologie von Mannigfaltigkeiten beleuchten.

· Lie-Gruppen sind sowohl eine interessante Klasse von Mannigfaltigkeiten mit einer reichen (durch die Gruppenstruktur diktierten) intrinsischen Geometrie, als auch eine Klasse von Gruppen, deren Darstellungstheorie man sehr gewinnbringend mit Hilfe der Differentialgeometrie untersuchen, und in einigen Fällen sogar vollständig beschreiben kann. Ausserdem helfen Lie-Gruppen bei der Deutung des Konzepts der “Struktur auf Mannigfaltigkeiten”.

§ 1 Mannigfaltigkeiten

Unser erstes Ziel ist aber die Klärung der Frage nach der Natur des Begriffs einer “differenzierbaren Struktur”, d.h. der Definition von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

· Die Idee der Differenzierbarkeit, die wir dazu aus Schule/Physik mitbringen, ist die Idee der linearen Approximierbarkeit stetiger Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, im Sinne der Existenz von

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|f(x+v) - f(x) - df(x)(v)|}{\|v\|} = 0 \quad (1.1)$$

für eine lineare Abbildung $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Oder ist dies bloß ein Schatten, und wenn ja, wovon?

· Nun kennen wir einerseits aus der Analysis verschiedene Verallgemeinerungen des Stetigkeitsbegriffs, andererseits aus der Linearen Algebra die vollständige Theorie endlich-dimensionaler Vektorräume, so dass es sinnvoll erscheinen mag, an der Schnittstelle auch nach entsprechenden Verallgemeinerungen des Ableitungsbegriffs zu suchen. Ohne Anspruch auf volle Begründbarkeit ist die etwas ernüchternde Antwort, dass die einzige Situation, in der wir durch Grenzwertbildung à la Newton/Leibniz ableiten können, tatsächlich die von (1.1) ist.

· Der scheinbar “natürlichste” Versuch, Topologie mit n -dimensionaler linearer Algebra zu vereinigen (sprich: topologische Räume in stetiger Weise durch den \mathbb{R}^n zu approximieren) ist zwar nicht ganz ausreichend, ergibt aber dennoch eine sinnvolle erste Definition.

Definition 1.1. Es sei $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Eine topologische Mannigfaltigkeit M der Dimension n ist ein zweit-abzählbarer Hausdorffscher topologischer Raum, welcher lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n mit der Standard-Topologie ist.

Erinnerung. · Eine Topologie auf einer Menge M ist ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$ von “offen” genannten Teilmengen $U \subset M$ mit $M, \emptyset \in \mathcal{T}$, welches unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. Eine Grundgerüst an abgeleiteten Begriffen wird in den Übungen wiederholt: Abgeschlossene Mengen, stetige Abbildungen, Teilraum- und Quotiententopologie, (topologischer) Zusammenhang, Kompaktheit.

· (M, \mathcal{T}) heisst Hausdorffsch, falls je zwei verschiedene Punkte $p_1 \neq p_2$ durch disjunkte Umgebungen getrennt werden können, d.h. es existieren stets offene Mengen U_1, U_2 mit $p_i \in U_i$ für $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Eine solche Existenz “genügend” offener Mengen stellt beispielsweise die Eindeutigkeit von Grenzwerten sicher.

· Ein topologischer Raum heisst zweitabzählbar, falls \mathcal{T} eine abzählbare Basis besitzt, d.h. es existiert ein abzählbares System $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \dots\} \subset \mathcal{T}$ von offenen

§1. MANNIGFALTIGKEITEN

Teilmengen mit der Eigenschaft, dass jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist. Ein solches Ausschliessen von “zu vielen” offenen Mengen erlaubt beispielsweise die Rückführung der Integration auf den lokalen Begriff durch Ausschöpfung (Partition der Eins).

· Die letzte (wichtigste!) Bedingung bedeutet: Für jedes $p \in M$ existiert eine Umgebung $U \ni p$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, und ein Homöomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$.

· Man könnte diese Definition auch ohne Vorgabe von n formulieren, d.h. nur verlangen, dass jedes $p \in M$ eine Umgebung U besitzt, welche homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Es stellt sich allerdings heraus, dass ein solches n (für $M \neq \emptyset$) lokal eindeutig, und daher jedenfalls konstant auf den Zusammenhangskomponenten von M ist. Wir werden nur “equi-dimensionale” Mannigfaltigkeiten betrachten.

· Man nennt ein Paar (U, φ) wie oben eine *Karte* von M um p , oder auch Karten-umgebung von p . Die U heissen auch Kartengebiete, und die φ Kartenabbildungen. Die Komponenten von φ bezüglich der Standardbasis des \mathbb{R}^n heissen als Abbildungen $\varphi^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto \varphi^i(q) := (\varphi(q))^i$ *Koordinatenfunktionen* bezüglich (U, φ) . ($i = 1, 2, \dots, n$)

· Koordinaten gehen also an allererster Stelle in die Definitionen der Differentialgeometrie ein. Für gegebenes M und p ($n > 0$) sind allerdings weder U noch φ eindeutig, und es ist eine zentrale Aufgabe sicherzustellen, dass alle Aussagen *unabhängig* von der Wahl der Koordinaten ist.

· Eine Koordinatenumgebung (U, φ) heisst in p zentriert falls $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. (U, φ) heisst Koordinatenkugel falls $\varphi(U) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_2 < r\}$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$.

· Ein *Atlas* von M ist eine Menge $\mathcal{A} \ni (U, \varphi)$ von Karten von M mit der Eigenschaft, dass $\bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U = M$.

Beispiel 1.2. · \mathbb{R}^n ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine abzählbare Basis der bekanntermassen Hausdorffschen Topologie besteht aus Kugeln mit rationalem Mittelpunkt und rationalem Radius,

$$\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}^n\} \quad (1.2)$$

· Sind M_1 und M_2 nicht-leere topologische Mannigfaltigkeiten, dann auch das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$, ausgerüstet mit der Produkttopologie (Dimension: $n_1 + n_2$), die disjunkte Vereinigung $M_1 \cup M_2$ nur für $n_1 = n_2$. (Man überlege sich, was passiert, wenn M_1 oder M_2 leer ist.)

· Offene Teilmengen von topologischen Mannigfaltigkeiten, ausgerüstet mit der Teilraumtopologie.

· Manche abgeschlossene Teilmengen. Insbesondere ist die n -dimensionale Einheits-Sphäre,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\} \quad (1.3)$$

eine topologische Mannigfaltigkeit. Hausdorff-Eigenschaft und Zweitabzählbarkeit der Teilraumtopologie sind klar. Weiters ist für gegebenes $p = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n$ mindestens ein $x^i \neq 0$, und daher liegt p oBdA in der Kartenumgebung $U_1 = \{x^1 >$

$0\} \cap S^n$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 &:= B_1(0) = \{(x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n \\ \varphi_1(x) &:= (x^2, \dots, x^{n+1}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(Umkehrabbildung: $\varphi_1^{-1}(y) := (\sqrt{1 - \|y\|_2^2}, y)$ für $y \in B_1(0)$.) Grössere Karten erhält man etwa durch stereographische Projektion. Man zeige, dass ein kleinster Atlas aus genau zwei Karten besteht.

· Der Doppel-Kegel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = |z|\} \subset \mathbb{R}^3 \tag{1.5}$$

ist keine topologische Mannigfaltigkeit, was sich aber leicht durch Entfernen des Ursprungs oder Abändern der Topologie “reparieren” lässt.

· Eine weitere Quelle von Mannigfaltigkeiten sind manche Quotienten nach Äquivalenzrelationen. Beispiel:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \{t + \mathbb{Z} \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{1.6}$$

ausgerüstet mit der Quotiententopologie, ist eine ein-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. (Achtung: Es handelt sich hier nicht um den “Quotienten nach dem Unterraum” $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, wie er in der Topologie benutzt wird.)

· Überhaupt muss man mit Quotienten im Allgemeinen vorsichtig sein. Betrachte etwa für $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ auf $M_1 \cup M_2$ die Äquivalenzrelation: $x_1 \sim x_2$ falls $x_1 \in M_1 \setminus \{0\}$, $x_2 \in M_2 \setminus \{0\}$, und $x_1 = x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Anschaulich ist dies die reelle Achse mit verdoppelter Null.) Diese Topologie ist zwar lokal euklidisch, aber nicht Hausdorffsch, beispielsweise da “beide Nullen” als Grenzwert der Folge ($a_n = \frac{1}{n}$) in Frage kommen.

· Leicht anders gelagert ist die Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^{n+1} , $(x^1, \dots, x^{n+1}) \sim (tx^1, \dots, tx^{n+1})$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \mathbb{R}^{n+1}/\sim ist nicht Hausdorffsch (und um den Ursprung herum auch nicht euklidisch). $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ ergibt den reell-projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$.

· Eine überabzählbare Situation erzeugt man beispielsweise durch das Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei der erste Faktor mit der Standard-Topologie, der zweite jedoch mit der diskreten Topologie ausgerüstet ist. Das Resultat ist lokal euklidisch und Hausdorffsch, aber nicht zweitabzählbar. Für weitere “pathologische” Beispiele siehe etwa Long line, Sorgenfrey line. Wir beschränken uns auf die folgende Version der Parakompaktheit von topologischen Mannigfaltigkeiten.

Theorem 1.3. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit, und \mathcal{B} eine Basis der Topologie von M . Sei \mathfrak{X} eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine abzählbare und lokal endliche Verfeinerung von \mathfrak{X} bestehend aus Elementen von \mathcal{B} .*

Erläuterung. \mathfrak{X} ist also ein System von offenen Mengen $X \subset M$ mit $\cup_{X \in \mathfrak{X}} X = M$. Eine Verfeinerung ist eine offene Überdeckung \mathfrak{Y} mit der Eigenschaft, dass jedes $Y \in \mathfrak{Y}$ in mindestens einem $X \in \mathfrak{X}$ enthalten ist. Die lokale Endlichkeit besagt, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung besitzt, welche nur endlich viele $Y \in \mathfrak{Y}$ nicht-leer schneidet. Wir behaupten ausserdem noch, dass $\mathfrak{Y} \subset \mathcal{B}$ gewählt werden kann.

§1. MANNIGFALTIGKEITEN

Die lokale Endlichkeit ist die entscheidende Bedingung. Wir beweisen sie durch Ausschöpfung von M mit kompakten Mengen.

Lemma 1.4. *Es existiert eine Folge $(K_k)_{k=1}^\infty$ von kompakten Teilmengen mit¹*

$$K_k \subset \overset{\circ}{K}_{k+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = M \quad (1.7)$$

Dieses Lemma gilt allgemein für zweit-abzählbare lokal kompakte Hausdorff-Räume (Mannigfaltigkeiten sind klarerweise lokal kompakt, da lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n .) Für die Anwendungen ist es oft nützlich, noch mit speziellen Basen der Topologie zu arbeiten.

Proposition 1.5. *Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine abzählbare Basis der Topologie von M , welche aus prekompakten Koordinatenkugeln besteht, das sind offene Mengen $B \subset M$ mit kompaktem Abschluss $\overline{B} \subset M$, welche homöomorph zu offenen Kugeln in \mathbb{R}^n sind.*

Beweis von 1.5. Es sei $\mathcal{A} \ni (U, \varphi)$ ein abzählbarer Atlas von M : Ist \mathcal{A}' ein beliebiger Atlas, und \mathcal{B} eine abzählbare Basis der Topologie, so ist $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset U \text{ für ein } (U, \varphi) \in \mathcal{A}'\}$ eine abzählbare Überdeckung von M . (Jedes U ist ja Vereinigung von Elementen von \mathcal{B} . \mathcal{B}' ist gerade die Vereinigung dieser Elemente über alle U , als Teilmenge von \mathcal{B} noch abzählbar.) Wählen wir für jedes $B \in \mathcal{B}'$ ein $(U_B, \varphi_B) \in \mathcal{A}'$ mit $B \subset U_B$, so ist $\{(B, \varphi_B|_B) \mid B \in \mathcal{B}'\}$ ein abzählbarer Atlas von M .

· Die Topologie einer jeden $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine abzählbare Basis, welche aus offenen rationalen Kugeln $B_r(x)$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \varphi(U)$ besteht (vgl. (1.2) und ersetze ggfs. r durch $r/2$). Mittels φ^{-1} auf M zurückgeschickt ergibt dies eine abzählbare Basis der Topologie von M , welche aus Koordinatenkugeln $B \subset M$ besteht.

· Es bleibt zu zeigen, dass die B präkompakt sind. Nach Konstruktion ist $\overline{\varphi(B)} = \overline{B_r(x)} \subset \varphi(U)$ kompakt in \mathbb{R}^n . Da $\varphi : U \xrightarrow{\cong} \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist, ist $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(B)})$ kompakt in der (von M stammenden) Relativtopologie auf U . Da M Hausdorffsch ist, ist daher $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(B)})$ auch abgeschlossen in M . Es folgt $\varphi^{-1}(\overline{\varphi(B)}) \supset \overline{B}$ und daher ist auch \overline{B} kompakt. \square

Bemerkungen. · Der etwas subtile Punkt am Schluss des Beweises ist, dass der Abschluss in U a priori nicht mit dem Abschluss in M übereinstimmen muss.

· Tatsächlich liefert der Beweis etwas mehr, denn die B sind nicht nur präkompakte Koordinatenkugeln, sondern ihr Abschluss \overline{B} ist auch noch selbst in einer (etwas grösseren) Koordinatenumgebung U enthalten. Man könnte beispielsweise erreichen, dass die (U, φ) wieder Koordinatenkugeln mit gleichem Mittelpunkt sind, was die Situation $\varphi(B) = B_r(x) \subset \overline{B_r(x)} \subset B_R(x) = \varphi(U)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$ erzeugt.

Beweis von 1.4. Es sei $(U_i)_{i=1}^\infty$ eine abzählbare Überdeckung von M durch präkompakte offene Mengen, wie etwa in 1.5 konstruiert. Dann ist insbesondere $K_1 := \overline{U_1}$

¹Für $X \subset M$ bezeichnet $\overset{\circ}{X}$ ihren offenen Kern.

kompakt. Für $k \geq 1$ verfahren wir rekursiv: Ist K_k kompakt, so existiert ein i_k so, dass

$$K_k \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{i_k} \tag{1.8}$$

(denn die (U_i) überdecken ja insbesondere auch K_k). Wir können annehmen, dass $i_k \geq k + 1$, so dass (i_k) (auch bei vielen Zusammenhangskomponenten) nie konstant wird, und setzen

$$K_{k+1} := \overline{U_1 \cup U_2 \dots \cup U_{i_k}} \tag{1.9}$$

Dann ist K_{k+1} kompakt und

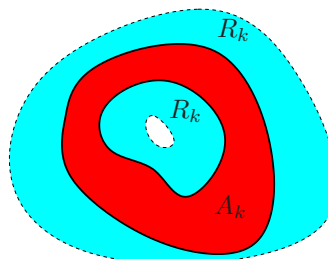
$$\overset{\circ}{K}_{k+1} = U_1 \cup U_2 \dots \cup U_{i_k} \supset K_k \tag{1.10}$$

und wegen $i_k \rightarrow \infty$ gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = M$. □

Beweis von 1.3. Sei $(K_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen.

· Wir setzen

$$\begin{aligned} A_k &:= K_{k+1} \setminus \overset{\circ}{K}_k \\ R_k &:= \overset{\circ}{K}_{k+2} \setminus K_{k-1} \end{aligned} \tag{1.11}$$



Dann ist A_k kompakt und R_k offen mit $A_k \subset R_k$.

· Nun existiert für jedes k und jedes $p \in A_k$ ein $X_p \in \mathfrak{X}$ mit $p \in X_p$. Da \mathcal{B} eine Basis der Topologie ist, existiert ein $B_p \in \mathcal{B}$ mit $p \in B_p \subset X_p \cap R_k$.

· $(B_p)_{p \in A_k}$ ist eine Überdeckung von A_k und da A_k kompakt ist, genügen bereits endlich viele. Die Vereinigung über k ergibt eine abzählbare Überdeckung $\mathfrak{Y} \ni B$ von M , welche eine Verfeinerung von \mathfrak{X} ist und aus Elementen von \mathcal{B} besteht.

· Wir müssen noch zeigen, dass diese Verfeinerung lokal endlich ist: Für $p \in A_k$ sei V eine Umgebung von p , welche in R_k enthalten ist. Da $R_k \cap R_{k'} = \emptyset$ für $k' \leq k - 3$ oder $k' \geq k + 3$, und alle $B \in \mathfrak{Y}$ in einem $R_{k'}$ enthalten sind, können höchstens solche B V nicht-trivial schneiden, welche zur Überdeckung von $A_{k'}$ mit $k - 2 \leq k' \leq k + 2$ gedient haben. Dies sind endlich viele, so dass die Überdeckung lokal endlich ist. □

Definition 1.6. Ein Morphismus von topologischen Mannigfaltigkeiten M, N (der Dimension n, m) ist eine stetige Abbildung $F : M \rightarrow N$ der zugrunde liegenden topologischen Räume. F heisst Isomorphismus, falls F ein Homöomorphismus ist (bijektiv und mit stetiger Umkehrabbildung).

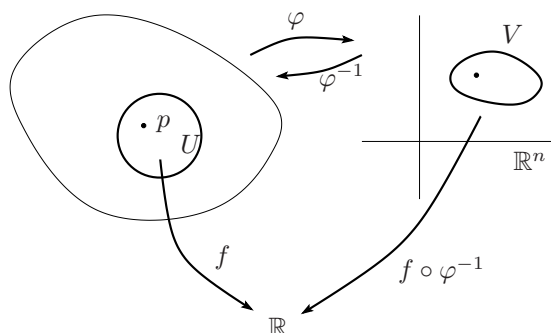
Beispielsweise ist die topologische Mannigfaltigkeit aus (1.6) mittels $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ isomorph zu $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ aus (1.3). Ebenso ist $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, wobei \sim die Identifikation der Antipoden ist.

Per Definition sind die Kartenabbildungen $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ Isomorphismen der topologischen Mannigfaltigkeiten $U \subset M$ und $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

§1. MANNIGFALTIGKEITEN

Plan: Wie wollten wir nun diese lokalen Isomorphismen benutzen, um den Differenzierbarkeitsbegriff und die Ableitung von \mathbb{R}^n auf Mannigfaltigkeiten zurückziehen?

Die natürliche Forderung wäre, dass eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in $p \in M$ differenzierbar sein sollte, falls eine Kartenumgebung (U, φ) um p existiert so dass $(\varphi^{-1})^*(f) := f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ in $\varphi(p)$ differenzierbar im Sinne von (1.1) ist. Die Ableitung von f in p wiederum sollte dann durch eine "Näherung" an f gegeben sein, welche in einer Kartenumgebung linear in der Abweichung von p ist.

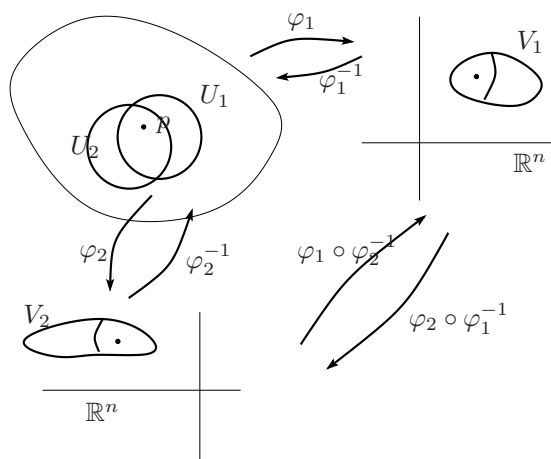


Diese Vorgehensweise ergibt als "Ableitung von f in p " zunächst für jede Karte von M um p , bezüglich der f differenzierbar ist, eine eigenständige lineare Abbildung, nämlich das gewöhnliche Differential $d(f \circ \varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wo $\mathbb{R}^n \supset V$. Unser Behebungsplan sieht vor, diese verschiedenen Differentiale unter *Kartenwechsel* zu identifizieren.

Unter einem Kartenwechsel versteht man für zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) von M mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ die Verkettungen

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} &: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} &: \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Diese Verkettungen sind zueinander inverse Homöomorphismen, im Allgemeinen aber *nicht differenzierbar*. Dies hat zur Folge, dass man die Differentiale $d(f \circ \varphi_1^{-1})$ und $d(f \circ \varphi_2^{-1})$ nicht in natürlicher Weise in Beziehung setzen kann.



Tatsächlich hängt schon der Begriff der Differenzierbarkeit von der Wahl der Karte ab.

Beispiel: $M = \mathbb{R} \ni x$. Als topologische Mannigfaltigkeit besitzt M nebst der "tautologischen" Karte (\mathbb{R}, id) auch noch die globale Karte $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$ und

$$(y :=) \varphi(x) := \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ \frac{x}{2} & x < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Dann ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x$ bezüglich der ersten Karte differenzierbar, in der zweiten gilt aber

$$f \circ \varphi^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & y \geq 0 \\ 2y & y < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

in $x = y = 0$ offensichtlich nicht differenzierbar.

Die “Lösung” dieses Teils des Problems ist genau die Identifikation einer differenzierbaren Struktur als Klasse von Karten, in denen die gleichen Funktionen differenzierbar sind. Um den eigentlich interessierenden Begriff der Ableitung kümmern wir uns dann später.

Vereinbarung: Im Folgenden heisst für eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ “glatt” falls alle Komponenten von F in alle Richtungen beliebig oft partiell differenzierbar sind, d.h. F ist von der Klasse C^∞ im Sinne der Vektoranalysis. Wir sagen nach einigen weiteren Bemerkungen zu anderen Klassen auch einfach nur “differenzierbar”.

Definition 1.7. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension n).

- Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) heissen (glatt) *verträglich* falls entweder $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ oder der Kartenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ein glatter Diffeomorphismus ist.
- Ein differenzierbarer Atlas für M ist ein Atlas $\mathcal{A} \ni (U, \varphi)$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Karten aus \mathcal{A} miteinander verträglich sind.
- Eine Karte heisst verträglich mit einem differenzierbaren Atlas \mathcal{A} , wenn sie mit allen Karten in \mathcal{A} verträglich ist.
- Ein differenzierbarer Atlas heisst vollständig oder maximal, falls jede Karte, die mit \mathcal{A} verträglich ist, bereits in \mathcal{A} enthalten ist.
- Eine differenzierbare Struktur auf M ist ein maximaler differenzierbarer Atlas.
- Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Bemerkungen. · Anstatt mit maximalen Atlanten (die tendenziell sehr dick sind) kann man auch mit Äquivalenzklassen arbeiten. Hierbei heissen zwei differenzierbare Atlanten äquivalent, wenn ihre Vereinigung wieder ein differenzierbarer Atlas ist (m.a.W., wenn alle ihre Karten miteinander verträglich sind). Durch Hinzufügen aller verträglichen Karten wird ein Atlas maximal.

· Man beachte, dass die Eigenschaft eines topologischen Raumes, eine Mannigfaltigkeit zu sein, “entdeckt” werden kann, denn es genügt zur Entscheidung, die (lokale) Topologie zu kennen. Eine differenzierbare Struktur hingegen erfordert zusätzliche Information.

· Es gibt aber auch alternative Zugänge, die die Begriffe auf gleiche Stufe zu stellen scheinen:

Lemma 1.8. *Es sei M eine Menge und $((U_\alpha, \varphi_\alpha))_\alpha$ ein System von nicht-leeren Teilmengen $U_\alpha \subset M$ und Abbildungen $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften:*

- (i) $\forall \alpha: \varphi_\alpha$ ist injektiv und $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ist offen im \mathbb{R}^n ;
- (ii) $\forall \alpha, \beta$ sind $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ (und $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$) offen im \mathbb{R}^n ;
- (iii) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sind Homöomorphismen (oder glatt);
- (iv) endlich oder abzählbar viele der U_α überdecken M ;
- (v) für je zwei verschiedene Punkte $p, q \in M$ existiert entweder ein U_α mit $U_\alpha \supset \{p, q\}$ oder disjunkte $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ mit $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$.

Dann existiert eine eindeutige Topologie auf M , in welcher M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist. Sind die Kartenwechsel in (iii) glatt, so

§1. MANNIGFALTIGKEITEN

definiert $((U_\alpha, \varphi_\alpha))_\alpha$ eine differenzierbare Struktur auf dieser topologischen Mannigfaltigkeit.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 1.9. · Endlich-dimensionale reelle Vektorräume. Lineare Koordinatensysteme $V \cong \mathbb{R}^n$ sind globale Karten, es gibt aber auch viele andere. Beliebte lokale Karten: Kugelkoordinaten.

· Offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind wieder differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

· Produkte von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. (Ein Atlas von $M_1 \times M_2$ besteht aus Karten der Form $(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$; Dimension ist additiv.)

· Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m im Sinne der Vektor-Analyse. Sie kommen in zwei Varianten: Grafen von glatten Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ (für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen) und Niveauflächen von regulären Abbildungen $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$. Die lokale Äquivalenz (mit $m = n + k$) folgt aus den noch bekannten Sätzen über die Umkehrabbildung / implizite Funktionen. Matrizen­gruppen fallen in diese Klasse, wie z.B. $GL(n, \mathbb{R}) = \{R \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det R \neq 0\}$ offen im \mathbb{R}^{n^2} , $SL(n, \mathbb{R}) = \{R \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det R = 1\}$, abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$

· Der auf S. 6 als Quotient definierte reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ wird mit dem differenzierbaren Atlas, welcher aus den verträglichen Karten

$$U_i := \{[x^1, \dots, x^{n+1}] \mid x^i \neq 0\}$$

$$\varphi_i([x^1, \dots, x^{n+1}]) := \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{\widehat{x^i}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \quad (1.15)$$

für $i = 1, \dots, n+1$ besteht, zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension n .

· Eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion sind die *Grassmann-Mannigfaltigkeiten*: Für einen reellen Vektorraum V der Dimension n und $k \leq n$ sei

$$G(k, V) = \text{Menge aller } k\text{-dimensionalen Unterräume von } V \quad (1.16)$$

Nach Wahl einer Basis von $V \cong \mathbb{R}^n$ kann man $G(k, \mathbb{R}^n) = G(k, n)$ als Quotienten einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times k}$ identifizieren, nämlich

$$G(k, n) = \{B \in \text{Mat}(n \times k, \mathbb{R}) \mid \text{rang}(B) = k\} / \text{Spalten­transformationen} \quad (1.17)$$

und direkt überprüfen, dass mit der induzierten Topologie $G(k, n)$ eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n - k)$ wird, mit $G(1, n + 1) \cong \mathbb{R}P^n$.

Wir wollen stattdessen mittels Lemma 1.8 direkt eine differenzierbare Struktur auf $G(k, V)$ konstruieren. Wir setzen dazu für einen jeden $(n - k)$ -dimensionalen Unterraum $Q \subset V$

$$U_Q := \{W \in G(k, V) \mid W \cap Q = \{0\}\} \subset G(k, V) \quad (1.18)$$

Mit anderen Worten sind dies genau alle zu Q komplementären k -dimensionalen Unterräume, und für jedes $W \in U_Q$ gilt (aus Dimensionsgründen) $V = W \oplus Q$. Es seien $\pi_{(W, Q)} : V \rightarrow W$ und $\xi_{(W, Q)} : V \rightarrow Q$ die zugehörigen Projektionen.

Wir definieren nun für festes $P \in U_Q$ eine Abbildung $\varphi_{(P,Q)} : U_Q \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$. Dazu bemerken wir, dass für $W \in U_Q$ die Abbildung

$$\pi_{(P,Q)}^W := \pi_{(P,Q)}|_W : W \rightarrow P \quad (1.19)$$

ein Isomorphismus von k -dimensionalen Vektorräumen ist (Es gilt ja: $\text{Ker}(\pi_{(P,Q)}) = Q$ und $Q \cap W = \{0\}$.), und setzen

$$\varphi_{(P,Q)}(W) := \xi_{(P,Q)} \circ (\pi_{(P,Q)}^W)^{-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)} \quad (1.20)$$

wobei wir im letzten Schritt noch Basen von P und Q gewählt haben.

Ist umgekehrt $A \in \mathbb{R}^{k(n-k)} \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q)$, so setzen wir

$$\psi_{(P,Q)}(A) := \left\{ p + \underbrace{Ap}_{\in Q} \mid p \in P \right\} \quad (1.21)$$

Dies ist offensichtlich ein k -dimensionaler Unterraum von V mit $\psi_{(P,Q)}(A) \cap Q = \{0\}$, d.h. $\psi_{(P,Q)}(A) \in U_Q$. Man überprüft unschwer, dass $\psi_{(P,Q)} = (\varphi_{(P,Q)})^{-1}$. $\varphi_{(P,Q)}$ ist also bijektiv und $\varphi_{(P,Q)}(U_Q)$ insbesondere offen.

Es sei dann Q' ein weiterer $(n-k)$ -dimensionaler Unterraum, und $P' \in U_{Q'}$. Dann ist $A \in \varphi_{(P,Q)}(U_Q \cap U_{Q'})$ genau dann, wenn $(\psi_{(P,Q)}(A) \cap Q') \cap Q' = \{0\}$. In geeigneten Basen ist dies eine Bedingung an das Nichtverschwinden gewisser Einträge in der $\text{id}_P + A$ darstellenden Matrix, und damit offen in A . Zur Berechnung des Kartenwechsels schreiben wir $W \in U_Q \cap U_{Q'}$ in zwei Weisen als

$$W = \{p + Ap \mid p \in P\} = \{p' + A'p' \mid p' \in P'\} \quad (1.22)$$

und drücken $A' \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P', Q')$ durch $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q)$ aus.

- Ist nämlich $A \in \varphi_{(P,Q)}(U_Q \cap U_{Q'})$, so existiert für jedes $p' \in P'$ nach Konstruktion ein eindeutiges $p =: I_A(p') \in P$ so, dass $p + Ap - p' \in Q'$, gleichbedeutend mit der inhomogenen linearen Gleichung $\pi_{(P',Q')}(p + Ap - p') = 0$. In den gewählten Basen für P und P' erfordert dies eine Matrix-Inversion, welche in den Einträgen von A rational ist (Cramersche Regel). Die Abbildung $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q) \ni A \mapsto I_A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, P')$ ist also glatt.

- Es ist dann

$$A'p' = p + Ap - p' = ((\text{id}_P + A) \circ I_A - \text{id}_{P'})(p') \quad (1.23)$$

und auch hier hängen in den Basen die Matrixeinträge von A' in glatter Weise von denen von A ab, was die Verkettung $A' = \varphi_{(P',Q')} \circ \psi_{(P,Q)}(A)$ als Diffeomorphismus $\varphi_{(P,Q)}(U_Q \cap U_{Q'}) \rightarrow \varphi_{(P',Q')}(U_Q \cap U_{Q'})$ ausweist.

- Betrachte als erstes nicht-triviales Beispiel die $(k = 2)$ -dimensionalen Unterräume von $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4) . Für $P = \text{span}(e_1, e_2)$, $Q = \text{span}(e_3, e_4)$ erhält man bezüglich dieser Basen

$$\text{id}_P + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

§1. MANNIGFALTIGKEITEN

mit $(a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}) \in \mathbb{R}^{2 \cdot 2}$ als Repräsentanten von $W = \psi_{(P,Q)}(A) \in G(2, 4)$ gemäß (1.17).

Der Wechsel zu $P' = \text{span}(e_2, e_3)$ und $Q' = \text{span}(e_1, e_4)$ ist möglich für $a_{31} \neq 0$, und man erhält

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{32}}{a_{31}} & \frac{1}{a_{31}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

sowie

$$\text{id}_{P'} + A' = (\text{id}_P + A)I_A = \begin{pmatrix} -\frac{a_{32}}{a_{31}} & \frac{1}{a_{31}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{42} - \frac{a_{32}a_{41}}{a_{31}} & \frac{a_{41}}{a_{31}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a'_{41} & a'_{42} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

- Für allgemeines k, n reichen $\binom{n}{k}$ Karten zur Überdeckung von $G(k, n)$ aus \Rightarrow (iv) in 1.8.
- Die Hausdorff-Bedingung (v) aus 1.8 sowie die Äquivalenz der Topologie mit der Quotiententopologie sind (relativ) offensichtlich.
- Kompaktheit von $G(k, n)$ als Übungsaufgabe.

Bemerkungen. · Unsere Liste von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist identisch mit den topologischen. Dies ist kein Zufall. Denn obwohl es topologische Mannigfaltigkeiten gibt, die *keine* differenzierbare Strukturen zulassen, so sind sie recht schwer zu finden (Kervaire 1960).

· Man könnte auch die Frage stellen, ob, und in welchem Sinne, für eine gegebene topologische Mannigfaltigkeit M , welche eine differenzierbare Struktur \mathcal{A} zulässt, letztere “eindeutig” ist. Eine erste Beobachtung in diese Richtung wäre, dass falls $\Psi : M \rightarrow M$ ein Homöomorphismus ist (von denen es viele gibt), der “Rückzug von \mathcal{A} unter Ψ ”, bestehend aus Karten $(\Psi^{-1}(U), \varphi \circ \Psi : \Psi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U)) \in \Psi^*(\mathcal{A})$ für $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ wieder eine differenzierbare Struktur auf M ist. Die beiden differenzierbaren Atlanten sind im Allgemeinen nicht verträglich miteinander, also nicht äquivalent im Sinne von S. 10. Allerdings ist (per Konstruktion) $\Psi^{-1} : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \Psi^*(\mathcal{A}))$ ein Diffeomorphismus von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten im Sinne des nächsten §, und in diesem Sinne sind die beiden differenzierbaren Strukturen isomorph zueinander.

· Die ersten Beispiele für topologische Mannigfaltigkeiten, die nicht isomorphe differenzierbare Strukturen zulassen, wurden Ende der 1950’er Jahre gefunden (Milnor’s exotische 7-Sphären). Dies und die weiteren Entwicklungen gehen allerdings ein gutes Stück über diese Vorlesung hinaus.

· Eine intermediäre Frage, auf die wir wenigstens die Antwort recht einfach formulieren können, ergibt sich aus der Existenz von Funktionen und Abbildungen auf \mathbb{R}^n , die zwar (stetig) differenzierbar sind, aber nicht glatt. Am anderen Ende gibt es noch die (reell) analytischen Funktionen, die sich durch konvergente Potenzreihen darstellen lassen. Man hat die Inklusionen

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \dots \supset \mathcal{C}^k \supset \mathcal{C} \dots \supset \mathcal{C}^\infty \supset \mathcal{C}^\omega \quad (1.27)$$

und die Definition 1.7 lässt sich für alle $k = 0, 1, \dots, \omega$ formulieren. Man redet dann von \mathcal{C}^k -Strukturen. $k = 0$ entspricht gerade den topologischen Mannigfaltigkeiten. Hassler Whitney zeigte 1935, dass jede \mathcal{C}^1 -Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit eine \mathcal{C}^k -Struktur für jedes $k > 1$ enthält, welche (bis auf \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen) eindeutig ist. (Jede einmal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit lässt sich also in eindeutiger Weise glätten.²) Wir beschränken uns im Folgenden auf $k = \infty$.

· Wir verabreden ausserdem noch, dass wir unter einem Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M stets einen Atlas der zugrunde liegenden topologischen Mannigfaltigkeit verstehen wollen, welcher mit der gegebenen differenzierbaren Struktur auf M verträglich ist. Ebenso soll eine Karte einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit stets eine Karte der zugrunde liegenden topologischen Mannigfaltigkeit sein, welche mit der differenzierbaren Struktur verträglich ist.

Übungsaufgabe: Die durch (1.13) definierte differenzierbare Struktur ist mit der gewöhnlichen (d.h. durch (\mathbb{R}, id) gegebenen) nicht verträglich, aber zu ihr isomorph.

§ 2 Differenzierbare Funktionen

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den ersten Teil unseres Plans von S. 9 durchführen.

Definition 2.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine reellwertige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar (glatt), wenn um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (U, φ) (in dem fixierten maximalen differenzierbaren Atlas) von M existiert so, dass $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ (unendlich oft) differenzierbar ist im Sinne der Vektoranalysis.

Lemma 2.2. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

- (i) Für jede Karte (W, ψ) von M ist $f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar.
- (ii) Für einen Atlas \mathcal{A} von M gilt: Für jede Karte $(W, \psi) \in \mathcal{A}$ ist $f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar.
- (iii) f ist differenzierbar.

Unter diesen Bedingungen ist f stetig.

Beweis. \mathcal{A} ist eine Teilmenge der differenzierbaren Struktur auf M , so dass (ii) unmittelbar aus (i) folgt. Ausserdem liegt jedes $p \in M$ in einer Kartenumgebung aus \mathcal{A} , so dass (iii) aus (ii) folgt. Gilt (iii), so folgt aus der Differenzierbarkeit von $f \circ \varphi^{-1}$ um $\varphi(p)$ deren Stetigkeit wie in der Analysis ($p, (U, \varphi)$ wie in Def. 2.1). Da φ ein Homöomorphismus ist, ist f stetig auf U . Damit ist f stetig in einer Umgebung eines jeden Punktes, und damit auf ganz M .

(iii) \Rightarrow (i): Um zu zeigen, dass $f \circ \psi^{-1}$ in jedem Punkt $y \in \psi(W)$ differenzierbar ist, genügt es, eine Umgebung von y in $\psi(W)$ zu finden, in welcher $f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar ist. Nach Voraussetzung (Def. 2.1) existiert um $p := \psi^{-1}(y)$ eine Karte (U, φ) s.d.

²Diese Aussage hängt von der Zweitabzählbarkeit ab.

§2. DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann ist auf $V := \psi(U \cap W) \ni y$

$$f \circ \psi^{-1}|_V = \underbrace{f \circ \varphi^{-1}}_{\text{diff'bar}} \circ \underbrace{\varphi \circ \psi^{-1}}_{\text{Kartenwechsel, daher diff'bar}} \quad (2.1)$$

differenzierbar. □

Lemma/Definition 2.3. *Aus den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen im \mathbb{R}^n folgt: Die Menge $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) =: \mathcal{F}(M)$ der differenzierbaren Funktionen auf M ist eine (i.A. unendlich-dimensionale) kommutative, assoziative und unitäre \mathbb{R} -Algebra: Mit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch $f_1 + \lambda f_2$ und $f_1 \cdot f_2 = f_2 \cdot f_1 \in \mathcal{F}(M)$. Das neutrale Element ist die konstante Funktion 1.*

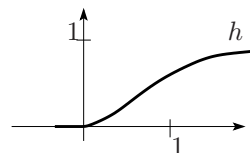
Bemerkungen. · Man beachte, dass die Verknüpfungen in $\mathcal{F}(M)$ *punktweise* definiert sind, die Differenzierbarkeit aber über eine *lokale* Bedingung (d.h. in offenen Umgebungen).

· Wir bemerken auch, dass für eine offene Teilmenge $U \subset M$, aufgefasst als eigenständige differenzierbare Mannigfaltigkeit, die Einschränkung $f \mapsto f|_U$ ein Morphismus von \mathbb{R} -Algebren $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ ist. Diese Abbildung ist im Allgemeinen aber weder injektiv noch surjektiv. Insbesondere lässt sich nicht jede differenzierbare Funktion auf U zu einer differenzierbaren Funktion auf M fortsetzen. (Beispiel: $x \mapsto 1/x$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.) Ist jedoch $(U_\alpha)_\alpha$ eine Überdeckung von M , und $f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ mit $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \forall \alpha, \beta$, so existiert eine eindeutige Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ mit $f|_{U_\alpha} = f_\alpha \forall \alpha$.

· Tatsächlich ist dies eine zentrale Idee der (Differential-)Geometrie, in Kartenumgebungen “lokal” definierte Objekte auf diese Weise zu Objekten “im Grossen” zusammenzusetzen. Für die Durchführung ist es oft nützlich, einen grossen Vorrat an differenzierbaren Funktionen zur Verfügung zu haben. Wir erinnern dazu zunächst an die Existenz “Punkte trennender” glatter Funktionen mit kompaktem Träger.

· Ein beliebiger Ausgangspunkt ist

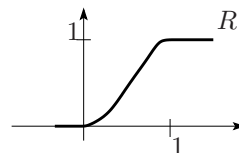
$$h(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$



unendlich oft differenzierbar mit $h^{(n)}(t) = 0 \forall n, \forall t \leq 0$. (Aber h wird nicht durch seine Taylorreihe um den Ursprung dargestellt, so dass die folgenden Konstruktionen auch nicht in der analytischen Kategorie durchführbar sind.)

· Es gilt $h(t) > 0$ für $t > 0$. Daher ist

$$R(t) := \frac{h(t)}{h(t) + h(1-t)} \quad (2.3)$$

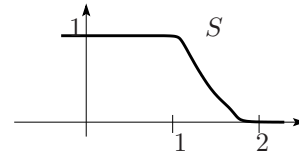


unendlich oft differenzierbar mit den Eigenschaften

$$R(t) = 0 \quad \text{für } t \leq 0, \quad R(t) = 1 \quad \text{für } t \geq 1, \quad 0 \leq R(t) \leq 1 \quad (2.4)$$

- Mit $L(t) := 1 - R(t) = \frac{h(1-t)}{h(t)+h(1-t)} = R(1-t)$ ist das Paar (L, R) ein Beispiel einer “der Überdeckung $(-\infty, 2) \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$ untergeordneten Teilung der Eins”. (Es gilt $L + R = 1$ und $\text{supp}(L) \subset (-\infty, 2)$, $\text{supp}(R) \subset (-1, \infty)$.)
- Mit $S(t) := R(2-t)$ erfüllt die Funktion auf $\mathbb{R}^n \ni x$

$$x \mapsto S(\|x\|_2) \begin{cases} = 1 & x \in B_1(0) \\ = 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0) \end{cases} \quad (2.5)$$



und ist weiter unendlich oft differenzierbar.

Proposition 2.4 (Partition der Eins). *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{X} = (X_\alpha)_\alpha$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine \mathfrak{X} untergeordnete differenzierbare Teilung der Eins, d.i. eine Menge $\mathfrak{C} = (f_\alpha)_\alpha$ von Funktionen $f_\alpha \in \mathcal{F}(M)$ mit den Eigenschaften*

- (i) $f_\alpha(p) \geq 0 \ \forall p \in M, \forall \alpha$
- (ii) $\text{supp } f_\alpha := \{p \in M \mid f_\alpha(p) \neq 0\} \subset X_\alpha$
- (iii) Jedes $p \in M$ besitzt eine Umgebung V s.d. $\text{supp}(f_\alpha) \cap V \neq \emptyset$ nur für endlich viele α .
- (iv) $\forall p \in M$ gilt $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ (wegen (iii) ist diese Summe lokal endlich)

Beweis. Glätten der Beweise von 1.3 und 1.5 liefert:

Beh.: Es existiert eine Folge $((B_i, U_i, \varphi_i))_{i=1}^\infty$ von Tripeln mit den Eigenschaften:

- (a) Die (U_i, φ_i) sind Karten von M .
- (b) $\forall i: B_i \subset \overline{B_i} \subset U_i$ sind präkompakte Koordinatenkugeln, d.h. $\varphi(B_i) = B_{r_i}(x_i)$ für ein $x_i \in \varphi_i(U_i)$ und $r_i > 0$.
- (c) $\forall i \exists \alpha_i$ s.d. $U_i \subset X_{\alpha_i}$, und wir fixieren ein solches α_i für jedes i .
- (d) Die B_i überdecken M .
- (e) $\forall p \in M \exists$ Umgebung $V \ni p$ s.d. $V \cap \overline{B_i} = \emptyset$ ausser für endlich viele i .

Bew.: Wie im Beweis von 1.3 sei $(K_k)_{k=1}^\infty$ eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen, $A_k := K_{k+1} \setminus \overset{\circ}{K}_k$ und $R_k := \overset{\circ}{K}_{k+2} \setminus K_{k-1}$. Wegen (der differenzierbaren Version von) 1.5 besitzt jedes $p \in A_k$ eine Koordinatenkugelumgebung (U_p, φ_p) mit $\varphi(U_p) = B_{2r_p}(\varphi(p))$ und $U_p \subset R_k$. Liegt $p \in X_{\alpha_p} \in \mathfrak{X}$, so können wir erreichen, dass auch $U_p \subset X_{\alpha_p}$.

• Setzen wir $B_p := \varphi_p^{-1}(B_{r_p}(\varphi(p)))$, so sind die $(B_p)_{p \in A_k}$ eine offene Überdeckung von A_k . Die Vereinigung endlicher Teilüberdeckungen über k ergibt die gewünschten Tripel $((B_i, U_i, \varphi_i))$. Lokale Endlichkeit folgt wie in 1.3. (Tatsächlich gilt die Implikation: $V \cap B_i = \emptyset \Rightarrow V \cap \overline{B_i} = \emptyset$.)

• Es sei dann für jedes i $h_i : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $h_i(x) > 0 \ \forall x \in \varphi_i(B_i)$ und $h_i(x) = 0 \ \forall x \in \varphi(U_i) \setminus \varphi_i(B_i)$. (Man erhält eine solche Funktion durch geeignetes Skalieren und Translation von (2.5).)

• Wir setzen

$$g_i(p) := \begin{cases} h_i \circ \varphi_i(p) & p \in U_i \\ 0 & p \in M \setminus B_i \end{cases} \quad (2.6)$$

Dies ist wohldefiniert und differenzierbar da $h_i \circ \varphi_i(p) = 0$ für $p \in U_i \setminus B_i$, und es gilt $g_i(p) > 0 \ \forall p \in B_i$, $\text{supp}(g_i) = \overline{B_i} \subset U_i \subset X_{\alpha_i}$.

§3. DER TANGENTIALRAUM

· Wegen der lokalen Endlichkeit und $\cup_i B_i = M$ ist $\sum_i g_i(p) \forall p \in M$ eine endliche Summe und positiv.

· Wir setzen

$$f_\alpha := \frac{\sum_{i|\alpha_i=\alpha} g_i}{\sum_i g_i} \quad (2.7)$$

(mit der offensichtlichen Vereinbarung, dass die Summe über die leere Menge 0 ist), und prüfen, dass $(f_\alpha)_\alpha$ die Bedingungen (i)–(iv) erfüllt. (Beachte, dass man für (ii), nämlich $\text{supp } f_\alpha = \cup_{\alpha_i=\alpha} \text{supp } f_i$, wieder die lokale Endlichkeit benötigt.) \square

Definition 2.5. Es seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten (der Dimension n, m). Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heisst differenzierbar, falls für alle $p \in M$ eine Karte (U, φ) von M um p und eine Karte (V, χ) von N um $F(p)$ existieren, s.d. (i) $F(U) \subset V$ und (ii) $\chi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \chi(V)$ differenzierbar im Sinne der Analysis ist.

· Wie auch bei differenzierbaren Funktionen überzeugt man sich von der Lokalität und Verträglichkeit mit Kartenwechseln. Insbesondere ist eine differenzierbare Abbildung stetig. (Diese Folgerung wäre nicht ohne Weiteres ganz richtig, wenn wir die Bedingung (i) fallen lassen würden.)

Beispiel 2.6. · Konstante Abbildungen $q : M \rightarrow \{q\} \subset N$,

· die Identität $\text{id}_M : M \rightarrow M$,

· lineare Abbildungen $A : V \rightarrow W$ von endlich-dimensionalen Vektorräumen,

· Verkettungen $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} O$ von differenzierbaren Abbildungen,

· Produkte $F_1 \times \cdots \times F_k : M \rightarrow N_1 \times \cdots \times N_k$ von differenzierbaren Abbildungen (s. auch Übungen),

· differenzierbaren Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$,

...sind alles differenzierbare Abbildungen.

Definition 2.7. (i) Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ heisst *Diffeomorphismus*, falls F differenzierbar und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung $F^{-1} : N \rightarrow M$ ebenfalls differenzierbar.

(iii) Die Menge $\text{Diff}(M) = \{F : M \rightarrow M \mid F \text{ ist Diffeomorphismus}\}$ bildet mit Verkettung als binärer Verknüpfung und der Identität als neutralem Element eine Gruppe, die *Diffeomorphismengruppe* von M .

Übungsaufgabe: Die Diffeomorphismengruppe wirkt transitiv auf zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten.

· Für das Weitere ist es konzeptionell wichtig festzuhalten, dass Kartenabbildungen $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ Diffeomorphismen von offenen Teilmengen von M mit offenen Teilmengen von \mathbb{R}^n sind (als eigenständige Mannigfaltigkeiten aufgefasst).

§3 Der Tangentialraum

Unsere Definition von differenzierbaren Funktionen und Abbildungen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten war scheinbar unabhängig von dem Begriff ihrer Ableitung. Auch haben wir noch gar nicht gesagt, auf welchem Vektorraum eine solche

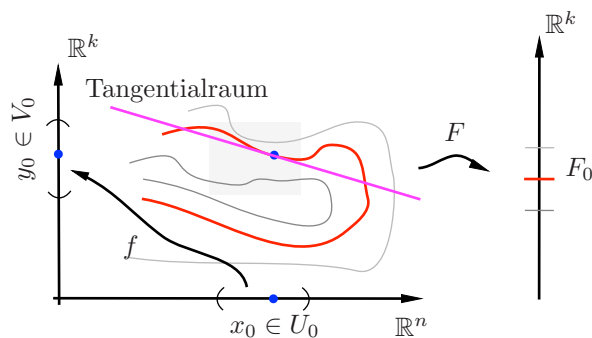
dann lineare Abbildung überhaupt operieren soll. In gewisser Weise am natürlichsten ist es, diese Objekte (mit Leibniz) *gleichzeitig* auf die Struktur von $\mathcal{F}(M)$ und ihrer Wechselwirkung mit $C^\infty(M, N)$ zurückzuführen, s. 3.2. Zunächst verfolgen wir aber eine etwas praktischere Schiene.

- Die Newtonsche Intuition bei der Einführung der Differentialrechnung ist die Identifikation der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ als die “Steigung der Tangenten” an den Graphen von f , und die Tangente selbst als “Reservoir von Infinitesima”, in welchem die Approximation von Funktionen auf lineare Algebra zurückzuführen ist. Abstrakt ist dies ein ein-dimensionaler reeller Vektorraum, er kommt jedoch (1) mit einer (mehr oder weniger) kanonischen Basis (der $1 \in \mathbb{R}$), und (2) eingebettet in \mathbb{R}^2 via $\mathbb{R} \ni h \mapsto (x_0, f(x_0)) + h(1, f'(x_0)) \in \mathbb{R}^2$. Offensichtlich hängt diese Tangente (und zwar sowohl ihre Steigung als auch ihr Fusspunkt) von x_0 ab.

- Die Wiederholung der mehrdimensionalen Verallgemeinerung davon bietet sich mit dem Satz über Umkehrabbildung/implizite Funktionen im Zusammenhang von differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n an (s. 1.9): Es sei $W \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : W \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar ($k \leq m$). Angenommen, für ein $z_0 \in W$ ist $\text{rang}(DF_{z_0}) = k$. Wir setzen $n = m - k$ und nehmen die Wahl einer Zerlegung $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \ni (x, y)$ an, bezüglich der die Einschränkung von DF_p auf den zweiten Faktor invertierbar ist, d.h. für die darstellende Matrix bezüglich den Standardkoordinaten $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^k)$, dass

$$\left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(x_0, y_0) \right)_{\substack{j=1, \dots, k \\ i=1, \dots, k}} \quad (3.1)$$

in $p = (x_0, y_0)$ ist invertierbar. Wir schreiben $F_0 := F(z_0) = F(x_0, y_0)$. Dann existiert eine Umgebung U_0 von x_0 in \mathbb{R}^n , eine Umgebung V_0 von y_0 in \mathbb{R}^k mit $U_0 \times V_0 \subset W$, und eine differenzierbare Funktion $f : U_0 \rightarrow V_0$ so, dass



$$F^{-1}(F_0) \cap (U_0 \times V_0) = \{(x, f(x)) \mid x \in U_0\} \quad (3.2)$$

Zu beachten ist, dass diese lokale Parametrisierung der Niveauläche von F durch f stark von der Wahl der Zerlegung von \mathbb{R}^m abhängt—Es lassen sich i.A. viele verschiedene Kombinationen von Variablen eliminieren. Zerlegen wir dann für eine solche Wahl das Differential $DF = (D_x F, D_y F)$ in Blockform, so folgt durch Ableiten von $F(x, f(x)) = F_0$ für $x \in U_0$:

$$D_x F(x, f(x)) + D_y F(x, f(x)) \circ Df(x) = 0 \quad (3.3)$$

Hier ist $D_x F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $D_y F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ nach (3.1) invertierbar, und $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Es gilt daher $Df = -(D_y F)^{-1} D_x F$.

§3. DER TANGENTIALRAUM

· Geometrisch bedeutet (3.3), dass das Bild von \mathbb{R}^n unter $\begin{pmatrix} \text{id} \\ Df \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m$ mit dem “Raum der Richtungen zusammenfällt, in welche F in erster Ordnung stationär ist”, d.h.

$$\text{Ker}(DF(x, f(x)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k) \quad (3.4)$$

(Genauer gesagt folgt aus (3.3), nämlich

$$DF \circ \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ Df \end{pmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

zunächst $\text{Im} \begin{pmatrix} \text{id} \\ Df \end{pmatrix} \subset \text{Ker}(DF)$, und die Gleichheit dann aus Dimensgründen.), der aber selbst als Teilraum des \mathbb{R}^m *unabhängig von der Parametrisierung* ist.

· Obwohl historisch wie intuitiv beispielgebend, und betont unabhängig von den Koordinaten (sowie für die Stellung von Übungsaufgaben sehr willkommen), ist die Identifikation (3.4) als Definition des Tangentialraums von abstrakten Mannigfaltigkeiten letztlich nicht brauchbar, da diese i.A nicht als “Untermannigfaltigkeiten eines \mathbb{R}^m ” geliefert werden. Stattdessen setzen wir für unsere erste vollgültige Definition des Tangentialraums von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten das Prinzip durch, dass (i) unsere Tangentialraumtheorie lokal und in natürlicher Weise invariant unter Diffeomorphismen sein soll, und benutzen, dass (ii) jede differenzierbare Mannigfaltigkeit (per Definition!) lokal diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist (wie im obigen Fall durch die lokale Parametrisierung $(\text{id}, f) : U_0 \rightarrow F^{-1}(F_0) \cap (U_0 \times V_0)$), und dass wir (iii) alles über Differentialrechnung im \mathbb{R}^n wissen.

Übungsaufgabe: Der Tangentialraum an die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, V)$ aus 1.9 im k -dimensionalen Unterraum $W \subset V$ ist in natürlicher Weise $T_W G(k, V) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V/W)$.

· Es sei nun also zunächst $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in U$. Wir definieren den Tangentialraum $T_p U$ von U in p als den U umgebenden Raum \mathbb{R}^n (als Menge) mit den Operationen

$$\begin{aligned} x +_{T_p U} y &:= (x - p) + (y - p) + p \\ \lambda \cdot_{T_p U} x &:= \lambda(x - p) + p \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\forall x, y \in T_p U = \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$. Hierbei stehen auf der rechten Seite die üblichen Vektorraumoperationen im \mathbb{R}^n .

· Natürlich ist $T_p U$ als reeller Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^n mit den Standardoperationen via $x \mapsto v := x - p$, und wir benutzen diesen Isomorphismus auch zum Rechnen. Allerdings hängt diese Identifikation von \mathbb{R}^n (als Menge) mit \mathbb{R}^n (als Vektorraum) von $p \in U$ ab, und die verschiedenen $T_p U$ müssen wohlunterschieden bleiben.

· Eine wichtige Eigenschaft dieser Definition ist die Erfüllung der obigen Forderung (i) für offene Mengen im \mathbb{R}^n :

Tatsachen. Es sei $F : U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, $p \in U$ und $x = p + v \in T_p U$. Dann ist für $t \in \mathbb{R}$ klein genug $t \cdot_{T_p U} x = p + tv \in U$ und

$$DF_p(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t \cdot_{T_p U} x) - F(0_{T_p U})}{t} + F(p) \in \mathbb{R}^n = T_{F(p)} F(U), \quad (3.7)$$

Die Abbildung $x \mapsto DF_p(x)$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Es gilt $D(\text{id}_U)_p = \text{id}_{T_p U}$ und die Kettenregel, $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ DF_p$. Dies garantiert, dass die Isomorphismen mit der Verkettung von Abbildungen verträglich sind. Ausserdem ist der Isomorphismus lokal in dem Sinne, dass die Einschränkung von F auf eine (kleinere) Umgebung von p den gleichen Isomorphismus von Vektorräumen in p induziert.

Definition 3.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $p \in M$. Wir definieren den Tangentialraum an M in p bezüglich einer Karte (U, φ) um p als

$$T_p M := \underbrace{T_{\varphi(p)} \varphi(U)}_{\text{obige Def.}} \quad (3.8)$$

Bemerkungen. · Die Unterschlagung der Karte in der Notation ist gerechtfertigt unter Berufung auf den mit einem Kartenwechsel $\chi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \chi(U \cap V)$ assoziierten verträglichen kanonischen Isomorphismus

$$D(\chi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)} \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\cong} T_{\chi(p)} \chi(U \cap V) \quad (3.9)$$

sowie die Lokalität der Konstruktion.

· Etwas abstrakter bedeutet die Unabhängigkeit von der Karte die Definition von $T_p M$ als denjenigen Unterraum des direkten Produktes

$$\times_{(U, \varphi)} T_{\varphi(p)} \varphi(U) \quad (3.10)$$

über alle Kartenumgebungen von p , welcher mit allen Kartenwechseln (3.9) verträglich ist, d.h.

$$T_p M := \left\{ (v_{(U, \varphi)})_{(U, \varphi)} \in \times_{(U, \varphi)} T_{\varphi(p)} \varphi(U) \mid v_{(V, \chi)} = D(\chi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v_{(U, \varphi)}) \right\} \quad (3.11)$$

(Gleichwertig dazu ist der Quotient

$$\bigcup_{(U, \varphi)} T_{\varphi(p)} \varphi(U) / \sim \quad (3.12)$$

nach der durch (3.9) gegebenen Äquivalenzrelation. Im Unterschied zu (3.11) lässt sich die Vektorraumstruktur hier allerdings erst im Quotienten einführen.)

· So oder so liefert die obige Definition ausserdem noch für jede Karte von M um p eine natürliche Basis von $T_p M$, nämlich die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von $\mathbb{R}^n = T_{\varphi(p)} \varphi(U)$. Man nennt diese Basis Koordinatenbasis von $T_p M$ (zu den Koordinaten $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$). Wir schreiben im Weiteren mit der Einsteinschen Summenkonvention

$$T_p M \ni v = v^i e_i = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in \mathbb{R}^n \quad (3.13)$$

· Sind $(w^1, \dots, w^n)^T$ die Komponenten von v bezüglich der Basis (f_1, \dots, f_n) von $T_p M$ in einer anderen Karte (V, χ) um p , so gilt nach den Rechenregeln der Differentialrechnung

$$w^j = \frac{\partial(\chi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) v^i \quad (3.14)$$

§3. DER TANGENTIALRAUM

(Auf der rechten Seite steht einfach die Jacobi-Matrix von $D(\chi \circ \varphi^{-1})$ bezüglich den Basen (e_i) und (f_j) .)

Wie bereits angedeutet ist es für eine “koordinatenfreie” Darstellung der Differentialgeometrie nützlich, die Definition von T_pM über Operationen auf der \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{F}(M)$ (vgl. 2.3) umzuformulieren.

Definition 3.2. Eine *Derivation* von $\mathcal{F}(M)$ in p ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\delta : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.15)$$

mit der Eigenschaft, dass $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$

$$\delta(f_1 \cdot f_2) = f_1(p) \cdot \delta(f_2) + f_2(p) \cdot \delta(f_1) \quad (3.16)$$

(Leibniz-Regel).

Im Zuge des Nachweises der Äquivalenz mit T_pM entwickeln wir die Intuition für Derivationen in p als “Ableitungen von Funktionen in von p ausgehende Richtungen”. Wir halten zunächst einige ihrer Eigenschaften fest.

Lemma 3.3. (i) Die Menge der Derivationen von $\mathcal{F}(M)$ in p ist unter funktionsweise Verknüpfung ein reeller Vektorraum, geschrieben $\text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$.

(ii) $\delta(1) = 0$

(iii) Ist $f \in \mathcal{F}(M)$ und existiert eine Umgebung U von p in der $f|_U = 0$, so gilt $\delta(f) = 0 \forall \delta \in \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$. (In Verbindung mit (ii) und der \mathbb{R} -Linearität folgt dann $\delta(f) = 0$ bereits aus $f|_U = \text{const.}$ und $\delta(f) = \delta(g)$ falls $f|_U = g|_U$.)

Beweis. (i): Für $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f \mapsto (\delta_1 + \lambda\delta_2)(f) := \delta_1(f) + \lambda\delta_2(f)$ offensichtlich wieder eine Derivation.

(ii): Aus der Leibniz-Regel folgt für die konstante Funktion $1(p) = 1 \forall p \in M$: $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + \delta(1) \cdot 1 = 2\delta(1)$. $\Rightarrow \delta(1) = 0$.

(iii): Es existieren $B_1 \subset \overline{B_1} \subset B_2 \subset \overline{B_2} \subset U$ zwei konzentrische präkompakte Koordinatenkugeln um p , und $h \in \mathcal{F}(M)$ mit $h(q) = 0$ für $q \in \overline{B_1}$ und $h(q) = 1$ für $q \in M \setminus B_2$ (vgl. Prop. 1.5 und den Beweis von Prop. 2.4 für ähnliche Konstruktionen). Wegen $B_2 \subset U$ und $f|_U = 0$ gilt $h \cdot f = f \in \mathcal{F}(M)$. Es folgt

$$\delta(f) = \delta(h \cdot f) = h(p)\delta(f) + f(p)\delta(h) = 0 \quad (3.17)$$

da $h(p) = f(p) = 0$. □

Theorem 3.4. Es sei M eine n -dimensionale differenzierbare³ Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ gilt $\text{Der}_p(\mathcal{F}(M)) \cong T_pM$. Insbesondere ist $\text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$ n -dimensional.

Beweis. Wir definieren eine lineare Abbildung $\delta : T_pM \rightarrow \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$ über die Koordinatenbasis (e_1, \dots, e_n) zu einer Karte (U, φ) um p und zeigen zunächst in dieser Darstellung, dass sie ein Isomorphismus ist. Anschliessend prüfen wir die

³Mit den hiesigen Definitionen existiert dieser Isomorphismus nur in der Kategorie der C^∞ -Strukturen. Siehe unten für weitere Bemerkungen.

Verträglichkeit mit den Kartenwechseln. Da wir schon jetzt wissen, dass die Einschränkung von φ auf kleinere Umgebungen die Basis von T_pM unverändert lässt, können wir oBdA annehmen, dass (U, φ) eine Koordinatenkugel ist, d.h. insbesondere, dass $\varphi(U)$ konvex ist. Wir schreiben $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n)$ für die Koordinaten von $\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \ni (x^1, \dots, x^n)$ und für $f \in \mathcal{F}(M)$ $f^{(\varphi)}$ für die differenzierbare Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

· Aus der punktweise Definition der Multiplikation in $\mathcal{F}(M)$ und der gewöhnlichen Produktregel folgt, dass für $i = 1, \dots, n$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \delta_{e_i} &: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ \delta_{e_i}(f) &:= \frac{\partial f^{(\varphi)}}{\partial x^i}(x_p) \end{aligned} \tag{3.18}$$

eine Derivation von $\mathcal{F}(M)$ in p ist. Wir behaupten, dass die lineare Abbildung $\delta : T_pM \rightarrow \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$, $\delta_v := v^i \delta_{e_i}$ für $v = v^i e_i$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Bew.: Zum Nachweis der Bijektivität seien $X^j \in \mathcal{F}(M)$ Funktionen mit $X^j(q) = \varphi^j(q)$ für q in einer Umgebung von p (auch wieder über geeignete Hutfunktionen konstruiert). Aus $(\varphi^j)^\varphi(x) = \varphi^j(\varphi^{-1}(x)) = x^j$ folgt für $v = v^i e_i \in T_pM$

$$\delta_v(X^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(x_p) = v^j \tag{3.19}$$

Insbesondere gilt $\delta_v = 0 \Rightarrow v = 0$.

· Ist umgekehrt $\delta \in \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$, so setzen wir $v^i := \delta(X^i)$ und behaupten, dass $v^i \delta_{e_i} = \delta_v = \delta$: Ist $f \in \mathcal{F}(M)$ so folgt aus dem gewöhnlichen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, angewendet auf $f^{(\varphi)}$ für $x \in \varphi(U)$

$$\begin{aligned} f^{(\varphi)}(x) - f^{(\varphi)}(x_p) &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f^{(\varphi)}(\underbrace{x_p + t(x - x_p)}_{\in \varphi(U) \text{ wegen der Konvexität von } \varphi(U)}) \\ \text{(Kettenregel)} &= (x^i - x_p^i) \underbrace{\int_0^1 dt \frac{\partial f^{(\varphi)}}{\partial x^i}(x_p + t(x - x_p))}_{=: R_i^{(\varphi)}(x)} \end{aligned} \tag{3.20}$$

wobei nach den Sätzen über Vertauschung von Integral und Ableitung $R_i^{(\varphi)}$ auf $\varphi(U)$ unendlich oft differenzierbar ist mit

$$R_i^{(\varphi)}(x_p) = \frac{\partial f^{(\varphi)}}{\partial x^i}(x_p) = \delta_{e_i}(f) \tag{3.21}$$

Mit φ und geeigneten Hutfunktionen nach M zurücktransportiert folgt daraus die Existenz von Funktionen $R_i \in \mathcal{F}(M)$ mit $R_i(p) = \delta_{e_i}(f)$ derart, dass

$$f = f(p) + (X^i - x_p^i) R_i \tag{3.22}$$

Mit 3.3, \mathbb{R} -Linearität und Leibniz-Regel folgt

$$\begin{aligned} \delta(f) &= \underbrace{\delta(f(p))}_{=0} + \underbrace{(\delta(X^i) - \delta(x_p^i))}_{=v^i} \underbrace{R_i(p)}_{=\delta_{e_i}(f)} + \underbrace{(X^i(p) - x_p^i)}_{=0} \delta(R_i) \\ &= v^i \delta_{e_i}(f) = \delta_v(f) \end{aligned} \tag{3.23}$$

§3. DER TANGENTIALRAUM

· Ist endlich (V, χ) eine weitere Karte um p , mit lokalen Koordinatenfunktionen $Y^j \in \mathcal{F}(M)$ (d.h. $Y^j = \chi^j$ in einer Umgebung von p) so gilt für die Komponenten (w^j) von δ bezüglich der zugehörigen Koordinatenbasis von $T_p M$ nach dieser Rechnung:

$$w^j = \delta(Y^j) = v^i \delta_{e_i}(Y^j) = v^i \frac{\partial(\chi \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(x_p) \quad (3.24)$$

d.h. (3.14). □

Bemerkungen. · Wir schreiben nach dieser Rechnung auch

$$\delta_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i \quad (3.25)$$

für die Koordinatenbasis von $T_p M$.

· Eine wichtige Quelle von Tangentialvektoren sind Kurven durch p , das sind differenzierbare Abbildungen $\gamma : I \rightarrow M$, wobei $0 \in I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist, mit $\gamma(0) = p$. Der ‘‘Tangentialvektor zu $\gamma(I)$ in p ’’ ist dann die Derivation

$$\dot{\gamma}(0)(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \quad (3.26)$$

(Denn nach der Kettenregel ist für $f \in \mathcal{F}(M)$ $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar im Sinne der Analysis.)

· Man prüft leicht in lokalen Koordinaten, dass jeder Tangentialvektor zu M in p sich auf diese Weise darstellen lässt, im Allgemeinen aber nicht auf eindeutige Weise. Offensichtlich kann man statt $0 \in I$ auch andere Punkte auszeichnen, d.h. $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M \forall t \in I$.

· Trotz der klassisch-geometrischen Intuition sind Kurven für eine unabhängige Definition des Tangentialraums nur schwer brauchbar: Die Äquivalenzrelationen sind recht undurchsichtig, und auch die Vektorraumstruktur lässt sich praktisch nicht ohne Hilfe von Koordinaten definieren.

· Ein Nachteil der Definition von $T_p M$ als Derivationen von $\mathcal{F}(M)$ (neben der nur scheinbaren Unabhängigkeit von Koordinaten) sind die Schwierigkeiten bei der Anpassung an andere Differenzierbarkeitsklassen.

· Beispielsweise stehen wie bereits bemerkt in der analytischen Kategorie i.A. weit weniger globale Funktionen zur Verfügung (vgl. etwa Satz von Liouville in der Funktionentheorie). Es fehlen nicht nur die für die Beweise benötigten Hutfunktionen, sondern es lassen sich i.A. nicht einmal alle Tangentialvektoren durch Funktionen in $\mathcal{F}(M)$ nachweisen. Einen alternativen Zugang, der auch hier offen bleibt, erhält man durch Übergang zu sogenannten *Funktionenkeimen in $p \in M$* . Das sind Äquivalenzklassen von Paaren (f, U) mit $U \ni p$ offen und $f \in \mathcal{F}(U)$ unter der Relation

$$(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2) : \exists W \subset U_1 \cap U_2 : p \in W \text{ und } f_1|_W = f_2|_W \quad (3.27)$$

· Mit lokal definierten algebraischen Operationen: $[(f_1, U_1)] + [(f_2, U_2)] := [(f_1 + f_2, U_1 \cap U_2)]$ etc.) wird der Raum $\mathcal{F}_p(M) \ni [f]$ zu einer \mathbb{R} -Algebra. Die Auswertung in p ist die wohldefinierte lineare Abbildung $[f] \mapsto [f]_p := f(p)$. Eine Derivation von $\mathcal{F}_p(M)$ ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\delta_p : \mathcal{F}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\delta([f_1] \cdot [f_2]) = [f_1]_p \delta([f_2]) + [f_2]_p \delta([f_1])$.

· Man zeigt dann unschwer, dass

$$\text{Der}(\mathcal{F}_p(M)) \cong T_p M \quad (3.28)$$

wobei auf der rechten Seite weiter die Definition 3.1 steht: Der Isomorphismus in (3.18) hängt nur vom Verhalten der Funktionen in Umgebungen von p ab, und gilt daher lokal in der analytischen wie auch der \mathcal{C}^∞ -Kategorie.

· Interessant ist noch der a priori Nachweis, dass in der \mathcal{C}^∞ -Kategorie $\text{Der}_p(\mathcal{F}(M)) \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p(M))$. In diesem Fall lässt sich nämlich jeder Keim $[f] \in \mathcal{F}_p(M)$ mittels einer geeigneten Hutfunktion $h \in \mathcal{F}(M)$ durch hf nach ganz M fortsetzen, d.h. die Abbildung $\mathcal{F}(M) \ni f \mapsto [f] \in \mathcal{F}_p(M)$ ist surjektiv. Für $\delta_p \in \text{Der}(\mathcal{F}_p(M))$ ist dann die Erklärung $\mathcal{F}(M) \ni f \mapsto \delta(f) := \delta_p([f])$ eine Derivation von $\mathcal{F}(M)$ in p , und $\delta(f) = 0 \forall f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow \delta_p([f]) = 0 \forall [f] \in \mathcal{F}_p(M)$, d.h. $\delta_p \mapsto \delta$ ist injektiv. Ist umgekehrt $\delta \in \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$ so ist $\mathcal{F}_p(M) \ni [f] \mapsto \delta_p([f]) := \delta(f)$ wie im Beweis von 3.3 unabhängig von der Fortsetzung von einem Repräsentanten (f, U) von $[f]$ nach M . Daher ist $\delta \mapsto \delta_p$ wohldefiniert und ein Isomorphismus.

· Für eine weitere algebraische Umformulierung betrachten wir für $p \in M$ das maximale Ideal von $\mathcal{F}(M)$,

$$\mathfrak{m}_p := \{f \in \mathcal{F}(M) \mid f(p) = 0\} \quad (3.29)$$

und schreiben für eine Derivation $\delta \in \text{Der}_p(\mathcal{F}(M))$ $\lambda_\delta(f) := \delta(f)$ für ihre Einschränkung als \mathbb{R} -lineare Abbildung auf \mathfrak{m}_p . (Vgl. 3.3 (ii).) Aus der Leibniz-Regel folgt für $f, g \in \mathfrak{m}_p$

$$\lambda_\delta(fg) = 0 \quad (3.30)$$

d.h. $\lambda_\delta|_{(\mathfrak{m}_p)^2} = 0$, m.a.W.: λ_δ ist wohldefiniert auf Klassen $\langle f \rangle \in \mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2$, d.h. eine lineare Abbildung in $(\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2, \mathbb{R})$.

Beh.: Die Abbildung $\lambda : \text{Der}_p(\mathcal{F}(M)) \mapsto (\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)^\vee$, $\delta \mapsto \lambda_\delta$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Bew.: Die Linearität von λ ist offensichtlich, es bleibt also zu zeigen, dass sie bijektiv ist. Dazu setzen wir für $\lambda \in (\mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2)^*$ und $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\delta_\lambda(f) := \lambda(\underbrace{\langle f - f(p) \rangle}_{\in \mathfrak{m}_p}) \quad \text{Bild in } \mathfrak{m}_p/(\mathfrak{m}_p)^2 \quad (3.31)$$

und zeigen, dass dies eine Derivation in p ist:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(fg) - f(p)\delta_\lambda(g) - g(p)\delta_\lambda(f) &= \\ &= \lambda(\langle fg - f(p)g(p) \rangle) - f(p)\lambda(\langle g - g(p) \rangle) - g(p)\lambda(\langle f - f(p) \rangle) \\ &= \lambda(\langle fg - f(p)g - g(p)f + f(p)g(p) \rangle) \\ &= \lambda(\underbrace{\langle (f - f(p))(g - g(p)) \rangle}_{\in (\mathfrak{m}_p)^2}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Man zeigt leicht, dass $\lambda = (\delta)^{-1}$. □

§3. DER TANGENTIALRAUM

· Wegen ihrer lokalen Natur bleiben diese Überlegungen auch nach Ersetzen von $\mathcal{F}(M)$ durch $\mathcal{F}_p(M)$ und damit für analytische Strukturen gültig.

· Geht man andererseits zu den größeren \mathcal{C}^k -Strukturen mit $1 \leq k < \infty$ über, so gilt zwar nach wie vor der algebraische Isomorphismus $\text{Der}_p(\mathcal{C}^k(M)) \cong (\mathfrak{m}_p^{(k)}/(\mathfrak{m}_p^{(k)})^2)^\vee$. Beim Versuch, den Beweis von 3.4 anzupassen, d.h. dem Vergleich mit unserem geometrisch-analytischen Tangentialraum, trifft man aber auf die Schwierigkeit, dass die Funktionen $R_i^{(\varphi)}$ in (3.20) im Allgemeinen *an Differenzierbarkeit verloren haben*. Tatsächlich ist in diesem Fall der algebraisch definierte Tangentialraum auch *nicht mehr endlich-dimensional*: Beispielsweise erfüllen für $M = \mathbb{R}$, $p = 0$ die Funktionen $f_\alpha(x) := x^\alpha$ für $k < \alpha < k + 1$ zwar $f_\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ sowie $\frac{d}{dx}f_\alpha(0) = 0$, sie sind aber in $\mathfrak{m}_0^{(k)}/(\mathfrak{m}_0^{(k)})^2$ *linear unabhängig*. Die geometrische Derivation $\frac{d}{dx}|_{x=0}$ spannt also nicht den gesamten algebraischen Tangentialraum auf.⁴ Eine mögliche Abhilfe ist hier das Ersetzen von $(\mathfrak{m}_p)^2$ durch die “in p stationären Keime”,

$$\mathfrak{s}_p := \left\{ f \in \mathfrak{m}_p \mid \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) = 0 \quad \forall i, \text{ für eine (oder äquivalent) alle Karten } (U, \varphi) \text{ um } p \right\} \quad (3.33)$$

d.h. es gilt in allen Differenzierbarkeitsklassen

$$T_p M = (\mathfrak{m}_p / \mathfrak{s}_p)^\vee \quad (3.34)$$

· Ist (U, φ) eine Karte von M um p , so geben die Klassen der Koordinatenfunktion $x^i \in \mathcal{F}(U)$ (bzw. lokal äquivalenter $X^i \in \mathcal{F}(F)$) eine Basis von $\mathfrak{m}_p / \mathfrak{s}_p = (T_p M)^\vee$, dem *Kotangentialraum von M in p* . Wir schreiben $dx^i := \langle x^i \rangle$ für diese Basis. Offenbar gilt

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(dx^i) = \delta_j^i \quad (3.35)$$

d.h. die (dx^i) sind die zu (∂_i) aus (3.25) duale Basis.

Fazit: Jede der obigen Definitionen (über Karten, Kurven, oder Derivationen) hat ihre Vor- und Nachteile und es ist sinnvoll, sich mit allen dreien vertraut zu machen. Es sei auch noch bemerkt, dass man selbst für topologische Mannigfaltigkeiten einen vernünftigen Ersatz für den Tangentialraum (genauer gesagt, das Tangentialbündel) finden kann.⁵

Beispiel 3.5. · Für einen endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V sowie dessen offene Teilmenge als Mannigfaltigkeiten gilt per Definition in kanonischer Weise $T_p V = V \forall p \in V$.

· Für Produktmannigfaltigkeiten gilt:

$$T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2 \quad (3.36)$$

· Die Beschreibung (3.4) des Tangentialraums an Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m als Unterraum des \mathbb{R}^m wird im nächsten § in den allgemeinen Kontext gestellt, s. 4.14

· Für Quotientenräume siehe Übungen.

⁴s. L. E. Taylor, “The tangent space to a \mathcal{C}^k -manifold,” Bull. Am. Math. Soc. **79**, 746 (1973)

⁵s. R. Lashof, “The tangent bundle of a topological manifold,” Am. Math. Monthly, **79** 1090 (1972)

§ 4 Abbildungen von konstantem Rang

Wir sind nun in der Lage, die Verallgemeinerung der Vektoranalysis auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten in Angriff zu nehmen. Wir beschränken uns hierbei auf \mathcal{C}^∞ -Strukturen, und unterdrücken den Isomorphismus 3.4 in der Notation. “ $v \in T_p M$ ” bedeutet also “ v ist eine Derivation in p ”, und umgekehrt definieren wir Tangentialvektoren über ihre Auswertung $v(f) \in \mathbb{R}$ auf alle $f \in \mathcal{F}(M)$.

Differential einer Abbildung

Definition 4.1. Das Differential einer differenzierbaren Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (der Dimension n, m) in $p \in M$ ist definiert als lineare Abbildung $DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ über die Formel

$$DF_p(v)(g) := v(F^*(g)) = v(g \circ F) \quad (4.1)$$

$\forall v \in T_p M, g \in \mathcal{F}(N)$. (Man prüft leicht, dass $DF_p(v) \in \text{Der}_{F(p)}(\mathcal{F}(N))$ und dass die Zuordnung $v \mapsto DF_p(v)$ linear in v ist.)

· Ist $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \ni (x^1, \dots, x^n)$ eine Karte von M um p und $\chi : V \rightarrow \mathbb{R}^m \ni (y^1, \dots, y^m)$ eine Karte von N um $F(p)$, so ist die darstellende Matrix von DF_p bezüglich den zugehörigen Koordinatenbasen (e_1, \dots, e_n) von $T_p M$ und (f_1, \dots, f_m) von $T_{F(p)} N$ die Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung von F . In Zeichen

$$DF_p(e_i) = \frac{\partial(\chi \circ F \circ \varphi^{-1})^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) f_j \quad (4.2)$$

Bew.: Wir benutzen die Beschreibung des Isomorphismuses aus dem Beweis von 3.4: Sind $Y^j \in \mathcal{F}(N)$ lokal gleich den Koordinatenfunktionen χ^j um $q = F(p)$, so gilt für die Komponenten eines Vektoren $w = w^j f_j \in T_q N$: $w^j = w(Y^j)$. Auswerten für $w = DF_p(e_i)$ gibt dann sofort (4.2):

$$DF_p(e_i)(Y^j) = e_i(F^*(Y^j)) = \frac{\partial(\chi^j \circ F \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \quad (4.3)$$

· Für die Standard-Beispiele von Mannigfaltigkeiten und differenzierbaren Abbildungen gilt mit Verweis auf 1.9, 2.6 und 3.5:

Lemma 4.2. · $D(\text{const.}) = 0$

- $D(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_p M}$
- Für $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ ist $DA = A$.
- $D(G \circ F)_p = DG_{F(p)} \circ DF_p$ (Kettenregel)
- Für $F = F_1 \times F_2 : M \rightarrow N_1 \times N_2$ gilt (vgl. (3.36))

$$DF_p = (DF_1)_p \oplus (DF_2)_p : T_p M \rightarrow T_{(F_1(p), F_2(p))}(N_1 \times N_2) = T_{F_1(p)} N_1 \oplus T_{F_2(p)} N_2 \quad (4.4)$$

(Denke: Spaltenblockmatrizen)

· Ist “umgekehrt” $F : M_1 \times M_2 \rightarrow N$, und setzen wir für jeweils feste $p_i \in M_i$

$$\begin{aligned} F^{(p_1)} M_2 &\rightarrow N, & F^{(p_1)}(p_2) &:= F(p_1, p_2) \\ F^{(p_2)} M_1 &\rightarrow N, & F^{(p_2)}(p_1) &:= F(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

§4. ABBILDUNGEN VON KONSTANTEM RANG

so (sind $F^{(p_i)} : M_{2-i} \rightarrow N$ differenzierbar) und es gilt

$$DF_{(p_1, p_2)} = (DF^{(p_2)})_{p_1} + (DF^{(p_1)})_{p_2} : T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2 \rightarrow T_{F(p_1, p_2)}N \quad (4.6)$$

(Denke: Partielle Ableitungen, Zeilenblockmatrizen)

Beweis. Nachrechnen in lokalen Koordinaten. □

· Tautologisch fällt das Differential einer differenzierbaren Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$, $Df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ mit ihrem in (3.32) definierten Bild $\langle f - f(p) \rangle \in \mathfrak{m}_p / (\mathfrak{m}_p)^2 = (T_pM)^*$ zusammen. Wir schreiben

$$(Df)_p(v) = df(v) = v(f) \quad (4.7)$$

· Definieren wir nun für eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ den Rang von F in $p \in M$ als den Rang der linearen Abbildung $DF_p \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_pM, T_{F(p)}N)$, so gilt ($\text{rang}_p(F) \leq \min\{n, m\}$) sowie

Lemma 4.3. Die Abbildung $M \rightarrow \mathbb{N}_0$, $p \mapsto \text{rang}_p(F)$ ist unterhalbstetig, d.h. $\forall p \in M \exists$ Umgebung $U \ni p$ s.d.

$$\text{rang}_q(F) \geq \text{rang}_p(F) \quad \forall q \in U \quad (4.8)$$

(Der Rang springt bei Annäherung an p höchstens runter, aber nie hoch.)

Beweis. In lokalen Koordinaten (wir schreiben jetzt häufiger y^j statt χ^j etc.) ist

$$r := \text{rang}_p(F) = \max \left\{ s, \begin{array}{l} \exists \text{ nicht-singuläre } s \times s \\ \text{Untermatrix von } \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

OBdA sei

$$\det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi(p)) \right)_{\substack{j=1, \dots, r \\ i=1, \dots, r}} \neq 0 \quad (4.10)$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen und der Determinante existiert dann eine Umgebung U von p in M s.d.

$$\det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\varphi(q)) \right)_{\substack{j=1, \dots, r \\ i=1, \dots, r}} \neq 0 \quad \forall q \in U \quad (4.11)$$

Es folgt $\text{rang}_q(F) \geq r = \text{rang}_p(F) \quad \forall q \in U$. □

Der “kritische Ort” von $F : M \rightarrow N$ sind diejenigen Punkte in M , in denen $\text{rang}_p(F)$ (herunter) springt, und spielt eine Hauptrolle in der Differentialtopologie und der Singularitätentheorie. Wir beschränken uns darauf, Abbildungen von konstantem Rang in eine “Normalform” zu bringen.

Lokale Standardform

Wie oben bereits bemerkt folgt mit $n = \dim M$, $m = \dim N$ aus elementarer linearer Algebra, dass $\text{rang}_p F \leq \min(n, m)$

Definition 4.4. $F : M \rightarrow N$ heisst *Submersion in p* falls $\text{rang}_p F = m \leq n$, und *Immersion in p* , falls $\text{rang}_p F = n \leq m$, m.a.W.:

$$\begin{aligned} F \text{ Submersion in } p &\iff DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \text{ ist surjektiv} \\ F \text{ Immersion in } p &\iff DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N \text{ ist injektiv} \end{aligned} \tag{4.12}$$

· Wegen der Unterhalbstetigkeit (und der Tatsache, dass der Rang wegen seiner Maximalität bei Entfernung von p nicht hochspringen kann) ist F dann eine Submersion/Immersion in einer ganzen Umgebung von p . Nicht selten interessiert man sich für (globale) Submersionen/Immersionen, für die die Rangbedingungen auf ganz M gelten.

· Wir wollen zeigen, in welchem Sinne Submersionen lokale Fortsetzungen von surjektiven, Immersionen von injektiven linearen Abbildungen von Vektorräumen sind.

· Dazu wiederholen wir etwas allgemeiner, dass jede lineare Abbildung $A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ mit $(\dim V, \dim W < \infty)$ und $\text{rang}(A) = r$ einen Isomorphismus

$$V / \text{Ker } A \xrightarrow{\cong} \text{Im } A \tag{4.13}$$

induziert, und dass in geeigneten linearen Koordinaten auf V und W A die ‘‘kanonische’’ Form

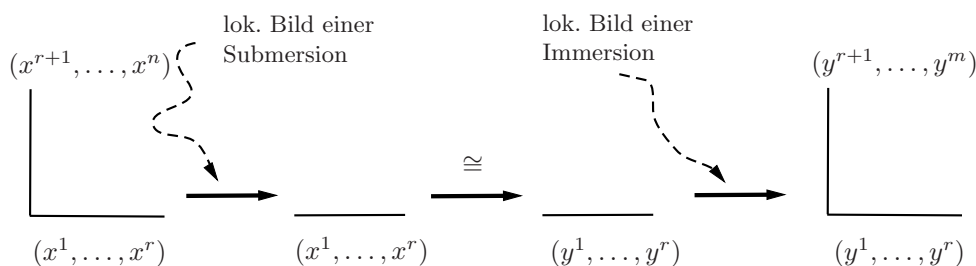
$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

hat. Dann ist natürlich:

Theorem 4.5. Sei $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Angenommen, $\text{rang } F$ ist konstant $= r$ auf M oder einer offenen Teilmenge davon. Dann gilt $\forall p$ in dieser offenen Teilmenge: \exists Koordinaten (U, φ) um p und (V, χ) um $F(p)$ s.d. die Koordinatendarstellung von F die Form

$$(y^1, \dots, y^m) = \chi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) \tag{4.15}$$

hat.



§4. ABBILDUNGEN VON KONSTANTEM RANG

Beweis. Es genügt, den Beweis für offene Mengen von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m zu führen, m.a.W. eine (beliebige) lokale Koordinatendarstellung $\tilde{F} = \tilde{\chi} \circ F \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ durch Davor- und -hinterschalten von lokalen Diffeomorphismen φ' , χ' des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m auf die behauptete Form zu bringen: $\chi' \circ \tilde{F} \circ \varphi'^{-1} = (\chi' \circ \tilde{\chi}) \circ F \circ (\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi'^{-1})$ ist ja dann nichts anderes als die Koordinatendarstellung von F bzgl. $\varphi = \varphi' \circ \tilde{\varphi}$ und $\chi = \chi' \circ \tilde{\chi}$ (mit unterdrückten Kartengebieten).

· Wir nehmen also an, dass $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar von konstantem Rang ist, oBdA mit $p = 0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, $F(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ und notfalls durch Verkleinern von U , dass

$$\det\left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\right)_{i,j=1,\dots,r} \neq 0 \quad (4.16)$$

1. Schritt: Die Idee zur Konstruktion von φ ist es, die um p lokal unabhängigen (F^1, \dots, F^r) als Teil der Koordinaten zu benutzen. (Vgl. den Beweis von (4.14) aus der Linearen Algebra.) Wir zerlegen

$$\begin{aligned} (x^1, \dots, x^r) &=: x_{\parallel} \quad \text{und} \quad (x^{r+1}, \dots, x^n) =: x_{\perp} \\ (F^1, \dots, F^r) &=: F_{\parallel} \quad \text{und} \quad (F^{r+1}, \dots, F^m) =: F_{\perp} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(Achtung: \parallel und \perp dienen nur dazu das Auge zu führen, und beziehen sich nicht auf innere Produkte) und setzen in einer Umgebung von $p = 0 \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{\parallel}^r \times \mathbb{R}_{\perp}^{n-r}$:

$$\varphi(x_{\parallel}, x_{\perp}) := (F_{\parallel}(x_{\parallel}, x_{\perp}), x_{\perp}) \in \mathbb{R}_{\parallel}^r \times \mathbb{R}_{\perp}^{n-r} \quad (4.18)$$

Deren Ableitung hat die Block-Gestalt (bzgl. den Standardkoordinaten von \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m als Tangentialräume an Produktmannigfaltigkeiten)

$$D\varphi = \begin{pmatrix} D_{\parallel}F_{\parallel} & D_{\perp}F_{\parallel} \\ 0 & \text{id}_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Da nach Voraussetzung (4.16) $D_{\parallel}F_{\parallel}$ in $(0,0)$ nicht singular ist, ist $D\varphi$ dort invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert daher eine Umgebung von 0 s.d. φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Bezeichnen wir das Argument von φ^{-1} mit $(\tilde{x}_{\parallel}, x_{\perp})$, so gilt nach Konstruktion $F_{\parallel} \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}_{\parallel}, x_{\perp}) = \tilde{x}_{\parallel}$.

· Die Ableitung der Abbildung

$$\underbrace{F \circ \varphi^{-1}}_{=: \tilde{F}}(\tilde{x}_{\parallel}, x_{\perp}) = (\tilde{x}_{\parallel}, \underbrace{F_{\perp} \circ \varphi^{-1}}_{=: \tilde{F}_{\perp}}(\tilde{x}_{\parallel}, x_{\perp})) \quad (4.20)$$

hat dann die Blockgestalt

$$D(F \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} \text{id}_{r \times r} & 0 \\ D_{\parallel}\tilde{F}_{\perp} & D_{\perp}\tilde{F}_{\perp} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Da φ^{-1} ein Diffeomorphismus ist, ist der Rang von \tilde{F} (konstant) gleich r in der Umgebung von 0. Daher ist $D_{\perp}\tilde{F}_{\perp} = 0$, d.h. $\forall i = r+1, \dots, n$ und $j = r+1, \dots, m$ sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial x^i} = 0 \text{ in einer Umgebung von } 0 \quad (4.22)$$

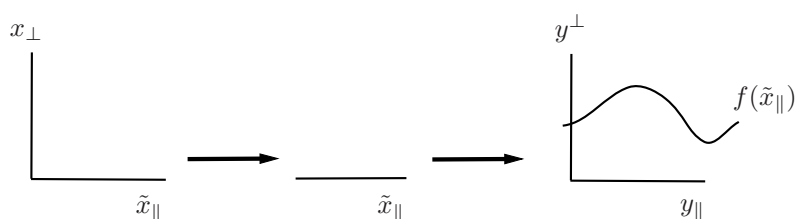
Eine Standard-Anwendung des Schrankensatzes impliziert, dass \tilde{F}_\perp in einer (zusammenhängenden, beispielsweise würfelförmigen) Umgebung von $(0, 0)$ unabhängig von x_\perp ist. M.a.W.

$$\tilde{F}_\perp(\tilde{x}_\parallel, x_\perp) = \tilde{F}_\perp(\tilde{x}_\parallel, 0) =: f(\tilde{x}_\parallel) \quad (4.23)$$

mit einer differenzierbaren Funktion f in einer geeigneten Umgebung von 0.

2. Schritt: Im jetzigen Stadium hat unsere Abbildung \tilde{F} bezüglich den Koordinaten (y_\parallel, y_\perp) von $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}_\parallel^r \times \mathbb{R}_\perp^{m-r}$ die Gestalt

$$(y_\parallel, y_\perp) = \tilde{F}(\tilde{x}_\parallel, x_\perp) = (\tilde{x}_\parallel, f(\tilde{x}_\parallel)) \quad (4.24)$$



· Wir setzen dann

$$\chi(y_\parallel, y_\perp) := (y_\parallel, y_\perp - f(y_\parallel)) \quad (4.25)$$

Dies ist offensichtlich ein Diffeomorphismus (wo definiert) und

$$\chi \circ \tilde{F}(x) = \chi \circ F \circ \varphi^{-1}(\tilde{x}_\parallel, x_\perp) = (\tilde{x}_\parallel, 0) \quad (4.26)$$

ist von der behaupteten Gestalt. □

Korollar 4.6 (Umkehrabbildung). *Sei $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M$ so, dass $DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ein linearer Isomorphismus ist. (Notwendigerweise ist dann $\dim M = \dim N$.) Dann ist F ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. \exists Umgebungen $U \ni p$ und $V \ni F(p)$, s.d. $F|_U : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.*

Immersionen vs. Einbettungen

Der Satz 4.5 gibt als Verallgemeinerung von (4.14) Auskunft über die lokale Form von differenzierbaren Abbildungen auf offenen Mengen, auf denen der Rang konstant ist. Eine für die Differentialgeometrie wesentliche Neuerung zur linearen Algebra sind dann (notwendig sprunghafte) Änderungen des Rangs, die eine Fülle von lokalen Formen annehmen können, wir aber hier nicht weiter diskutieren wollen.

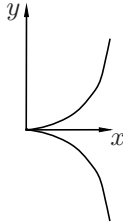
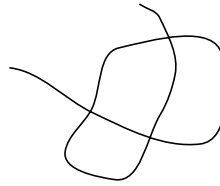
· Weitere Neuerungen, auf die wir wenigstens kurz eingehen wollen, ergeben sich aus dem Zusammenspiel mit der (globalen) Topologie.

Definition 4.7. Eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ heisst (differenzierbare) *Einbettung*, falls F

- (i) eine Immersion, d.h. $\text{rang } DF_p = \dim M \leq \dim N \forall p \in M$, und
- (ii) eine topologische Einbettung ist, d.h. F ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild $F(M) \subset N$, ausgerüstet mit der Relativtopologie.

§4. ABBILDUNGEN VON KONSTANTEM RANG

· Die Bedingung (ii) kann für globale Immersionen verletzt sein, welche nicht injektiv sind, wie beispielsweise sich selbst schneidende Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t$.

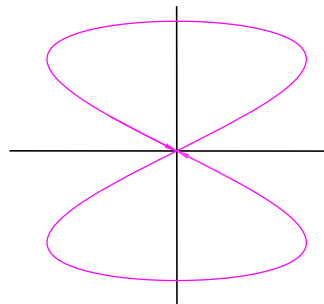


· Umgekehrt gibt es natürlich auch differenzierbare Abbildungen, welche injektiv und sogar topologische Einbettungen, aber keine Immersionen sind. Beispiel:

$$\gamma : t \mapsto (t^2, t^3) \quad (4.27)$$

· Ein weiteres typisches Beispiel sind “uneigentliche” Abbildungen (eine Abbildung heißt eigentlich, wenn das Urbild von kompakten Mengen kompakt ist), wie etwa

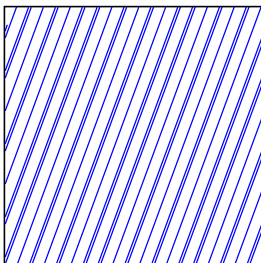
$$\begin{aligned} \gamma : (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (\sin(2t), \sin t) \end{aligned} \quad (4.28)$$



Dies ist eine injektive Immersion, kann aber keine topologische Einbettung sein, da das Bild in der Relativtopologie kompakt ist.

· Für das letzte Beispiel sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1 \cong \mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \\ \gamma(t) &:= (t + \mathbb{Z}, \alpha t + \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (4.29)$$



Dies ist wieder eine injektive Immersion, aber kein Homöomorphismus auf das Bild: Beispielsweise hat die Folge $\gamma(n) = ((0 + \mathbb{Z}, \alpha n + \mathbb{Z}))_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $(0 + \mathbb{Z}, 0 + \mathbb{Z}) \in \mathbb{T}^2$ (Quotiententopologie) konvergente Teilfolge, deren Urbildfolge aber nicht konvergiert.

Das Prüfen der Einbettungseigenschaft hängt i.A. von den Details von F ab. Im Unterschied dazu gibt es bei Submersionen Kriterien, welche nur von den globalen Eigenschaften von M und N abhängen. Beispielsweise gilt (Übungsaufgabe): Ist $F : M \rightarrow N$ eine Submersion, M kompakt und N zusammenhängend, so ist F bereits surjektiv.

Schnitte

Definition 4.8. Es seien X, Y topologische Räume, und $\pi : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ein *Schnitt* von π ist eine stetige Abbildung $\sigma : Y \rightarrow X$ s.d. $\pi \circ \sigma = \text{id}_Y$. Ein *lokaler Schnitt* ist eine offene Menge $V \subset Y$ und eine stetige Abbildung $\sigma : V \rightarrow X$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}_V$.

Proposition 4.9. *Eine differenzierbare Abbildung $\pi : M \rightarrow N$ ist eine Submersion genau dann, wenn jeder Punkt $p \in M$ im Bild eines lokalen Schnitts von π liegt.*

Beweis. “ \Rightarrow ”: Folgt aus dem Theorem 4.5: Sind (U, φ) und (V, χ) Karten mit $\varphi(p) = 0$, $\chi(\pi(p)) = 0$ und $\chi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$ so erfüllt $\sigma : V \rightarrow X$, $\sigma(q) := \varphi^{-1}(\chi^1(q), \dots, \chi^m(q), 0, \dots, 0)$ die Bedingungen: $\sigma(\pi(p)) = p$ und $\pi \circ \sigma(q) = q \forall q \in V$.

“ \Leftarrow ”: Ist $\sigma : V \rightarrow X$ ein lokaler Schnitt mit $p \in \sigma(V)$ so folgt aus $\pi \circ \sigma = \text{id}_V$ durch Ableiten: $D\pi_p \circ D\sigma_{\pi(p)} = \text{id}_{T_{\pi(p)}V}$ (Kettenregel). Dies geht nur, wenn $D\pi_p$ surjektiv ist, d.h. π ist eine Submersion. \square

Untermannigfaltigkeiten

Allgemein zu reden sollten Unterobjekte Bilder von injektiven Abbildungen sein, welche mit allen vorhanden Strukturen in der gegebenen Kategorie verträglich sind. Bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gibt es dabei mehrere leicht verschiedene Möglichkeiten zum Umgang mit der globalen topologischen Struktur. In dem Zugang über “lokal euklidische Räume mit differenzierbaren Kartenwechseln” sind Untermannigfaltigkeiten “lokal euklidische Unterräume”. Dazu zählen in natürlicher Weise nicht nur lineare Unterräume $\mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^n$, sondern auch deren Translate um konstante Vektoren.

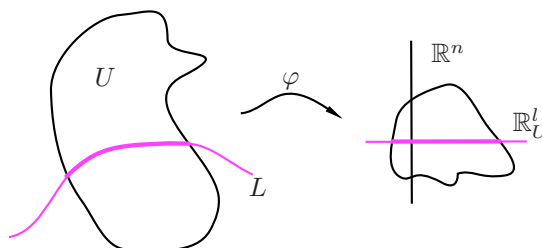
Definition 4.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Eine Teilmenge $L \subset M$ heisst (*differenzierbare*) *Untermannigfaltigkeit* (der Dimension $l \leq n$) falls gilt: $\forall p \in L \exists$ Karte (U, φ) von M um p und ein euklidischer Unterraum $\mathbb{R}_U^l \subset \mathbb{R}^n$ s.d.

$$\varphi(U \cap L) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}_U^l \tag{4.30}$$

M.a.W. $\exists (c^{l+1}, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^{n-l}$ s.d.

$$U \cap L = \{q \in U \mid \varphi^j(q) = c^j \forall j = l + 1, \dots, n\} \tag{4.31}$$

· Für $M = \mathbb{R}^n$ finden wir die Definition einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m wieder. Allgemeiner gilt:



Proposition 4.11. *Es sei $L \subset M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine eindeutige Topologie und differenzierbare Struktur auf L , mit welcher die Inklusion $i : L \rightarrow M$ eine differenzierbare Einbettung ist.*

Beweis. · Die einzige Topologie auf L , die $L \hookrightarrow M$ zu einer topologischen Einbettung macht, ist die Relativtopologie. Diese ist klarerweise Hausdorffsch und zweit-abzählbar.

§4. ABBILDUNGEN VON KONSTANTEM RANG

· Die Definition 4.10 liefert eine Überdeckung von L durch (relativ) offene Menge $U \cap L$ zusammen mit Abbildungen $\varphi|_{U \cap L} : U \cap L \rightarrow \varphi(U) \cap \mathbb{R}_U^l$ welche Homöomorphismen auf ihr Bild (aufgefasst als offene Teilmenge von \mathbb{R}^l) sind. Daher ist L lokal euklidisch, also eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension l .

· Um zu zeigen, dass $\{(U \cap L, \varphi|_{U \cap L})$ der obigen Form} ein differenzierbarer Atlas auf L ist, genügt es jetzt, die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel zu untersuchen: Sind $(U \cap L, \varphi|_{U \cap L})$ und $(V \cap L, \chi|_{V \cap L})$ zwei solche Karten (sagen wir mit nicht-leerem Durchschnitt), so ist

$$\begin{aligned} \chi|_{V \cap L} \circ (\varphi|_{U \cap L})^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap L)} : \varphi(U \cap V \cap L) &\rightarrow \chi(U \cap V \cap L) \\ \parallel &\parallel \\ \varphi(U \cap V) \cap \mathbb{R}_U^l &\rightarrow \chi(U \cap V) \cap \mathbb{R}_V^l \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (4.32)$$

die Einschränkung eines Diffeomorphismusses auf einen euklidischen Unterraum, daher differenzierbar und von vollem Rang. (Der differenzierbare Atlas definiert dann wie üblich eine differenzierbare Struktur durch Vervollständigen des Atlases. Zur Frage, ob alle Karten von L durch Einschränkung von Karten von M kommen) wir nennen solche Karten Schnittkarten(, s. 4.12.)

· Um jetzt zu zeigen, dass $i : L \hookrightarrow M$ eine differenzierbare Einbettung ist, müssen wir nur noch prüfen, dass i eine Immersion ist. Wir tun dies für $p \in L$ bezüglich einer Schnittkarte $(U \cap L, \varphi|_{U \cap L})$ von L um p wie in der Definition, und der zugehörigen Karte (U, φ) von M um $i(p) = p$. Die Darstellung von i bezüglich dieser Karten ist

$$\varphi \circ i \circ (\varphi|_{U \cap L})^{-1} = \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap L)}}_{=\text{id}_{\varphi(U \cap L)}} : \varphi(U \cap L) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}_U^l \rightarrow \varphi(U) \quad (4.33)$$

nichts anderes als die lokale Darstellung der Inklusion $\mathbb{R}_U^l \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, welche klarerweise differenzierbar und von maximalem Rang (l) ist. i ist also eine Einbettung.

· Zum Nachweis der Eindeutigkeit zeigen wir, dass jede Karte (W, ψ) von L aus einer (a priori anderen) differenzierbaren Struktur, die die Inklusion zu einer differenzierbaren Einbettung (auch hier genügt wieder: Immersion) macht, mit allen unseren Schnittkarten $(U \cap L, \varphi|_{U \cap L})$ verträglich ist. Ist $U \cap W \neq \emptyset$, so ist

$$\begin{aligned} \varphi|_{U \cap L} \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap L \cap W) &\rightarrow \varphi(U \cap L \cap W) \subset \mathbb{R}^n \\ \parallel & \\ \varphi \circ \psi^{-1} &= \varphi \circ i \circ \psi^{-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

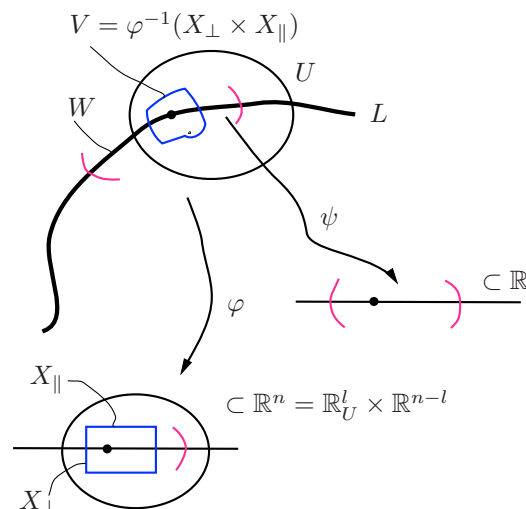
die Koordinatendarstellung der Inklusion $i : L \hookrightarrow M$ bezüglich der Karten (W, ψ) von L (aus der a priori anderen differenzierbaren Struktur) und (U, φ) von M . Diese ist nach Voraussetzung differenzierbar von maximalem Rang, und (da bereits ein Homöomorphismus) auch ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^l \supset \psi(U \cap L \cap W) \rightarrow \varphi(U \cap L \cap W)$, so dass (W, ψ) mit unserem Atlas verträglich ist. \square

Lemma 4.12. *Sei (W, ψ) eine Karte von L um $p \in L$ (aus der obigen differenzierbaren Struktur). Dann existiert eine Karte (V, χ) von M um p mit $V \cap L \subset W$, $\chi(V \cap L) = \chi(V) \cap \mathbb{R}_V^l$ (mit $\mathbb{R}_V^l = \mathbb{R}^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$) und $\chi|_L = \psi|_{W \cap V \cap L} \times \{0\}$.*

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte von M um p mit $\varphi(U \cap L) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}_U^l$ wie in Def. 4.10. Wir nehmen oBdA an, dass $\mathbb{R}_U^l = \mathbb{R}^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$. Es existiert dann eine Umgebung X_{\parallel} von $\varphi(p)$ in $\varphi(U \cap W) \cap \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^l$ und eine Umgebung X_{\perp} von $0 \in \mathbb{R}^{n-l}$ s.d. $X_{\parallel} \times X_{\perp} \subset \varphi(U)$. (Dies folgt aus den Eigenschaften der Produkttopologie.) Wir schreiben entsprechend dieser Zerlegung $\varphi = (\varphi_{\parallel}, \varphi_{\perp})$.

• Setze $V = \varphi^{-1}(X_{\parallel} \times X_{\perp})$. Dies ist offenbar offen in M und $p \in V \cap L \subset W$. Die Abbildung $\sigma := \psi \circ (\varphi|_{U \cap L})^{-1}|_{X_{\parallel} \times \{0\}}$ ist die Einschränkung des Koordinatenwechsels von $(U \cap L, \varphi|_{U \cap L})$ nach (W, ψ) (beides Karten von L), und daher ein Diffeomorphismus $X_{\parallel} \rightarrow \psi(V \cap L) \subset \mathbb{R}^l$.

• Es sei dann $\chi := (\sigma, \text{id}_{X_{\perp}}) \circ (\varphi_{\parallel}, \varphi_{\perp}) : V \rightarrow \psi(V \cap L) \times X_{\perp}$. Dies ist eine differenzierbare Karte von M um p , denn $\chi \circ \varphi^{-1} = (\sigma, \text{id}_{X_{\perp}})$ ist ein Diffeomorphismus. Die Bedingung $\chi|_{V \cap L} = (\sigma, \text{id}) \circ (\varphi_{\parallel}, 0) = \psi|_{V \cap L} \times \{0\}$ ist klar. \square



Eine nützliche Quelle von Untermannigfaltigkeiten sind Niveaumengen von Abbildungen von konstantem Rang.

Proposition 4.13. *Ist $F : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung von konstantem Rang r , dann gilt: $\forall c \in N$ ist $F^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von M der Kodimension r (d.h. $\dim(F^{-1}(c)) = \dim(M) - r$).*

Beweis. Mit Theorem 4.5. \square

Wir schliessen mit einer für das Verständnis der geometrischen Zusammenhänge zentralen Beobachtung.

Fakten 4.14. • Ist $L \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, dann haben wir für jedes $p \in L$ zwei Vektorräume definiert: Den Tangentialraum $T_p L$ an L in p , und den Tangentialraum $T_p M$ an M in p . Dabei ist der erste durch das Differential der Inklusion $i : L \hookrightarrow M$ in kanonischer Weise ein Unterraum des zweiten.

• Der Quotient $N_p L := T_p M / T_p L$ heisst Normalenraum von L in M . Dieser ist i.A. nicht in kanonischer Weise ein Unterraum von $T_p M$!

• Ist $L = F^{-1}(c)$ eine reguläre Niveaumenge (Prop. 4.13), so gilt

$$T_p L = \text{Ker } DF_p \subset T_p M \tag{4.35}$$

als linearer Unterraum der Kodimension r .

• Man veranschauliche sich dies am Beispiel von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m .

§ 5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

Mit unserer Definition 4.10 ist eine Untermannigfaltigkeit gerade das Bild einer differenzierbaren Einbettung. Ein schwächerer Begriff ist der einer *immergierten Untermannigfaltigkeit* als Bild einer injektiven Immersion, welche nicht notwendig eine topologische Einbettung ist. Die intrinsische Topologie ist also i.A. feiner als die Relativtopologie, siehe die Beispiele auf S. 31, und für fixiertes Bild nicht notwendig eindeutig (s. Übungen). Spezielle immergierte Untermannigfaltigkeiten treten in natürlicher Weise in der Theorie der Lie-Gruppen auf.

§ 5 Vektorfelder und Flüsse

In der Vektoranalysis versteht man unter einem differenzierbaren *Vektorfeld* auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ einfach eine differenzierbare Abbildung $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (in der Physik treten im Bildbereich auch schon einmal \mathbb{R}^r für $r \neq n$ auf). Ein typische Anwendung sind (autonome) gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Bedingung $\dot{x}(t) = X(x(t))$ (zusammen mit geeigneten Anfangswerten) auf Kurven $x : \mathbb{R} \rightarrow U$ zeigt, dass wir vom geometrischen Standpunkt aus den Wertebereich von X für jedes x als den Tangentialraum von U in x aufzufassen haben, und macht uns klare Vorgaben für die Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten. Wir schon bei Funktionen führen wir zunächst den Differenzierbarkeitsbegriff ein, interpretieren Vektorfelder als Erzeuger von Diffeomorphismen, und beschäftigen uns später mit den eigentlichen Ableitungen.

Wir beginnen für diesen Zweck mit der Definition des Tangentialbündels als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir betrachten für eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M die disjunkte Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\} \quad (5.1)$$

aller Tangentialräume in Punkten von M . Man beachte, dass trotz der suggestiven Notation $(p, v) \in TM$ dies *nicht* als kartesisches Produkt (von M mit irgendeinem "festen" n -dimensionalen Vektorraum) definiert ist und i.A. auch nicht als solches aufgefasst werden soll bzw. kann. Erstens sind die $T_p M$ für verschiedene p i.A. nicht in natürlicher Weise isomorph zueinander und zweitens lassen sich, selbst wenn man dies tun wollte, solche Isomorphismen i.A. nicht in einer Weise wählen, die mit der (natürlichen) stetigen/differenzierbaren Struktur auf TM verträglich ist, die wir gleich einführen werden.

· Dies hat insbesondere zur Folge, dass TM kein Vektorraum ist (Vektoren $v_1 \in T_{p_1} M$ und $v_2 \in T_{p_2} M$ lassen sich nur dann addieren, wenn $p_1 = p_2$)—Stattdessen kommt TM mit einer surjektiven Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) := p$, deren Fasern $\pi^{-1}(p) = T_p M$ n -dimensionale Vektorräume sind, und deren mengentheoretische Schnitte

$$\{\sigma : M \rightarrow TM \mid \sigma(p) \in T_p M \forall p\} = \times_{p \in M} T_p M \quad (5.2)$$

tautologisch isomorph zum direkten Produkt der $T_p M$ über alle $p \in M$ ist. Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ ist $\pi^{-1}(U) \cong TU$.

Proposition 5.1. Für jede Karte (U, φ) von M sei

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \cup \\ (p, v) &\mapsto (\varphi(p), D\varphi_p(v)) = \underbrace{(\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p))}_{\text{Komponenten von } \varphi(p)}, \underbrace{(dx^1(v), \dots, dx^n(v))}_{\text{Komponenten von } v \text{ in Ko-} \\ &\hspace{15em} \text{ordinatenbasis von } T_p M} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dann gilt: Das System $\mathcal{A} := \{(\pi^{-1}(U), \Phi) \mid (U, \varphi) \text{ Karte von } M\}$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.8 (mit differenzierbaren Kartenwechseln) und macht damit TM zu einer $2n$ -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Bedingungen (i)–(ii) und (iv)–(v) (Bijektivität mit offenen Mengen $\Phi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, Hausdorff und zweitabzählbar) sind klar.

· Zur Differenzierbarkeit der Kartenwechsel seien (U, φ) und (V, χ) zwei Karten von M . Dann ist

$$\begin{aligned} X \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \chi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\ X \circ \Phi^{-1}(x, v) &= \underbrace{(\chi \circ \varphi^{-1}(x))}_{\text{Diffeo.}}, \underbrace{(D\chi \circ \varphi^{-1})_x(v)}_{\text{diff'bar in } x, \text{ linearer} \\ &\hspace{15em} \text{Isomorphismus in } v} \end{aligned} \quad (5.4)$$

\Rightarrow Diffeomorphismus.

□

· Natürlich sind die definierenden Karten $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ in keinsten Weise alle Karten der differenzierbaren Struktur von TM . Von besonderem praktischen Interesse sind diejenigen Karten, welche mit der linearen Struktur in den Fasern $T_p M$ von π verträglich sind. Man erhält solche Karten durch Nachschalten einer differenzierbaren Familie linearer Isomorphismen, d.i. eine differenzierbare Abbildung

$$L : \varphi(U) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2} \quad (5.5)$$

Die modifizierte Karte ist $\Phi^{(L)} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, $\Phi^{(L)}(p, v) := (\varphi(p), L(\varphi(p))(v))$.

· Für eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist $DF : TM \rightarrow TN$, $DF(p, v) := (F(p), DF_p(v))$ ebenfalls differenzierbar (dies gibt aber kein hinreichendes Kriterium).

· Man prüft auch leicht, dass mit der differenzierbaren Struktur aus 5.1 die Projektion $\pi : TM \rightarrow M$ eine surjektive Submersion ist.

Definition 5.2. Ein differenzierbares Vektorfeld auf M ist ein differenzierbarer Schnitt von $TM \xrightarrow{\pi} M$, d.h. eine differenzierbare Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ X = \text{id}_M$, d.h. $\forall p \in M$ ist $X_p := X(p) \in T_p M$. Wir schreiben $\mathfrak{X}(M)$ für die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder auf M . Dies ist eine Teilmenge des Vektorraums $\times_{p \in M} T_p M$.

Proposition 5.3. Für $X \in \times_{p \in M} T_p M$ sind äquivalent:

(i) $X \in \mathfrak{X}(M)$

§ 5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

(ii) Für jede Karte (U, φ) von M (oder äquivalent für mindestens eine Karte um jeden Punkt) sind die Koordinatenkoordinatenfunktionen,

$$U \ni q \mapsto X_q(x^i) \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{5.6}$$

differenzierbar. (Hier ist $X_q \in T_qM = \text{Der}_q(\mathcal{F}(U))$ identifiziert, oder x^i wie im Beweis von 3.4 geeignet behutet nach M fortgesetzt.)

(iii) $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ ist die Funktion

$$XF : M \ni p \mapsto (Xf)(p) := X_p(f) \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

differenzierbar.

Beweis. Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) ist eine (Um-)formulierung der Definition eines differenzierbaren Schnitts einer Submersion bzgl. der Karte (U, φ) von M und der zugehörigen Karte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ von TM .

· Für (ii) \Rightarrow (iii) prüfen wir die Differenzierbarkeit von Xf in einer Karte (U, φ) von M . Für $x \in \varphi(U)$ ist

$$\begin{aligned} Xf \circ \varphi^{-1}(x) &= X_{\varphi^{-1}(x)}(f) \\ \text{(Thm. 3.4)} \quad &= \underbrace{X_{\varphi^{-1}(x)}(x^i)}_{\substack{\text{diff.'bar nach Vor.} \\ \text{von (ii)}}} \cdot \underbrace{\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(x)}_{\substack{\text{diff.'bar} \Leftarrow f \in \mathcal{F}(M)}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Rightarrow \text{diff.'bar}} \end{aligned} \tag{5.8}$$

(iii) \Rightarrow (ii) schliesslich folgt sofort durch geeignetes lokales Behuten von x^i zu Funktionen in $\mathcal{F}(M)$. □

Korollar 5.4. (i) $\mathfrak{X}(M)$ ist ein Untervektorraum von $\prod_{p \in M} T_pM$.

(ii) Mit punktweiser Multiplikation $(f, X) \mapsto fX : p \mapsto f(p) \cdot X_p$ wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einem Modul über der \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{F}(M)$. Insbesondere lassen sich lokale Schnitte nach Behuten global fortsetzen und daher ist $\mathfrak{X}(M)$ i.A. ∞ -dimensional.

Achtung: Für $f \in \mathcal{F}(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sind $Xf \in \mathcal{F}(M)$ und $fX \in \mathfrak{X}(M)$ sehr verschiedene Dinge.

Lemma 5.5. $\mathfrak{X}(M) \cong \text{Der}(\mathcal{F}(M))$

$$= \{ \delta : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) \mid \delta \text{ } \mathbb{R}\text{-linear und } \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g) \} \tag{5.9}$$

Beweis. Durch Auswerten in p werden globale Derivation von $\mathcal{F}(M)$ zu Derivationen von $\mathcal{F}(M)$ in p . □

Achtung: Eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ weist jedem *einzelnen* Tangentialvektor $v \in T_pM$ einen eindeutigen Vektor $DF_p(v) \in T_{F(p)}N$ zu und globalisiert wie oben bemerkt zu einer differenzierbaren Abbildung $DF : TM \rightarrow TN$.

Sie kann aber *nicht* dazu benutzt werden, um allgemein Vektorfelder in $\mathfrak{X}(M)$ zu Vektorfeldern auf N zu machen—Um jedem $q \in N$ einen eindeutigen von M kommenden Vektor zuzuweisen, muss F i.A. sowohl surjektiv als auch injektiv sein, m.a.W. ein Diffeomorphismus. (Wenn die Umkehrabbildung nicht differenzierbar ist, kann das Bildvektorfeld nicht-differenzierbar werden.)

Definition 5.6. Für eine differenzierbare Abbildung $F : M \rightarrow N$ heißen Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ F -verwandt, geschrieben $X \sim_F Y$, falls gilt:

$$Y_{F(p)} = DF_p(X_p) \quad \forall p \in M \quad (5.10)$$

Dies gibt hinreichende Bedingungen an Y_q nur für q im Bild von F , und notwendige Bedingungen an X sobald F nicht injektiv ist.

Ist hingegen $F : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, so definiert für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Vorschrift

$$N \ni q \mapsto (X_{(F)})_q := (DF)_{F^{-1}(q)} X_{F^{-1}(q)} \in T_q(N) \quad (5.11)$$

ein differenzierbares Vektorfeld $X^{(F)} \in \mathfrak{X}(N)$: Für $g \in \mathcal{F}(N)$ ist mit der Identifikation 5.5 (vgl. (4.1))

$$(X_{(F)})_q(g) = X_{F^{-1}(q)}(g \circ F) = ((F^{-1})^*(X(g \circ F)))(q) = (((F^{-1})^* \circ X \circ F^*)(g))(q) \quad (5.12)$$

Umgekehrt gilt für $Y \in \mathfrak{X}(N)$: $Y^{(F)} = Y_{(F^{-1})} = F^* \circ Y \circ (F^{-1})^* \in \mathfrak{X}(M)$

Wir geben nun zwei technisch verwandte, in ihrer wichtigen Bedeutung aber recht verschiedene Anwendungen von Vektorfeldern zur Untersuchung der Zusammensetzung (Integration) von Mannigfaltigkeiten aus ihren Einzelteilen, historisch gesehen eine der Motivationen zur Entwicklung der (metriklosen) Differentialgeometrie durch S. Lie etc. im Kontext von Systemen von Differentialgleichungen.

· Die erste Anwendung betrifft die infinitesimale Erzeugung der Diffeomorphismengruppe (genauer, der Zusammenhangskomponente der Identität in dieser Gruppe) einer Mannigfaltigkeit (s. Def. 2.7) durch differenzierbare Vektorfelder. Sie beantwortet die Frage nach der globalen/differenzierbaren Version der Interpretation von $T_p M$ als “Raum der Richtungen von Kurven durch p ”, s. (3.26). Demnach ist ein Vektorfeld zunächst die Zuweisung einer (Äquivalenzklasse von) Kurve(n) durch jeden Punkt von M , bei der es sich zur Fassung der Differenzierbarkeit anbietet auszunutzen, dass jede gegebene Kurve typischerweise (aber betont nicht notwendigerweise) durch mehr als einen Punkt geht.

Definition 5.7. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein globaler Fluss oder Einparameter-Gruppenwirkung auf M ist eine differenzierbare Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad \text{geschrieben} \quad (t, p) \mapsto \Phi_t(p) \quad (5.13)$$

mit der Eigenschaft, dass $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, p \in M$:

$$\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(p)) = \Phi_{t_1+t_2}(p) \quad \text{sowie} \quad \Phi_0(p) = p \quad (5.14)$$

§5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

· Äquivalent ist ein solcher Fluss für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus Φ_t (mit Inversem Φ_{-t}) so daß

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \Phi_t \quad (5.15)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist, welchen wir als differenzierbar auffassen in dem Sinne, dass $\Phi : \mathbb{R} \times M$ differenzierbar ist. ($\text{Diff}(M)$ selbst ist natürlich keine endlich-dimensionale Mf.)

· Alternativ ist $\forall p \in M$ die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t(p)$ eine differenzierbare Kurve durch p , welche differenzierbar von p abhängt in dem Sinne, dass $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ differenzierbar ist. (Der Raum der Kurven ist ja auch nicht endlich-dimensional, die Homomorphismeigenschaft ist hier weniger ersichtlich.)

Lemma 5.8. (i) Die Abbildung $p \mapsto X_p := \dot{\Phi}_0(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(p) \in T_p M$ ist ein glattes Vektorfeld. Wir nennen $X \in \mathfrak{X}(M)$ den infinitesimalen Erzeuger von Φ und die Kurven $\Phi_t(p)$ die Integralkurven von X (mehr sogleich).

(ii) X ist Φ -invariant in dem Sinne, daß $\forall t, p$:

$$X_{\Phi_t(p)} = (D\Phi_t)_p(X_p) \quad (5.16)$$

(iii) Schreiben wir für $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$ mit Karten von M (U, φ) um p_0 und (V, χ) um $\Phi_{t_0}(p_0)$ die Darstellung von Φ als

$$(\chi \circ \Phi \circ (id \times \varphi^{-1}))(t, \varphi(p)) = y^j(t, x(p)) =: y_p^j(t) \quad (5.17)$$

($j = 1, \dots, n$; t in einem geeigneten Intervall um t_0) sowie der im Spezialfall $t_0 = 0$ möglichen Wahl $(V, \chi) = (U, \varphi)$

$$(\varphi \circ \Phi \circ (id \times \varphi^{-1}))(t, \varphi(p)) =: x_p^i(t) \quad (5.18)$$

so lassen sich die Komponenten von X bzgl. der Koordinatenbasis zu (U, φ) berechnen durch

$$v^i(x(p)) := \dot{x}^i(0, x(p)) = \dot{x}_p^i(0) \quad (5.19)$$

und die Funktionen $y_p^j(t)$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\dot{y}_p^j(t) = w^j(y_p(t)) \quad (5.20)$$

mit Anfangswerten $x_p^i(0) = x^i(p)$.

Beweis. (i) folgt aus der Identifikation von X als partielle Ableitung der differenzierbaren Abbildung Φ auf dem Produkt $\mathbb{R} \times M$ (s. 4.2).

(ii) folgt aus der Kettenregel (s. wieder 4.2) und der Homomorphismeigenschaft:

$$\begin{aligned} X_{\Phi_t(p)} &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_s(\Phi_t(p)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_{s+t}(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_t(\Phi_s(p)) \\ &= (D\Phi_t)_p \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_s(p) \\ &= (D\Phi_t)_p X_p \end{aligned} \quad (5.21)$$

(iii) folgt durch Einsetzen. □

Beispiel 5.9. Wie hinreichend bekannt kommt nicht jedes Vektorfeld von einer Einparameteruntergruppe von $\text{Diff}(M)$:

- $X = \partial_x$ auf $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ergibt die ODE $\dot{x}(t) = 1$ mit Lösung $x(t) = x(0) + t$, $t \in (-x(0), 1 - x(0))$, nicht für alle t definiert.
- $X = x^2 \partial_x$ auf \mathbb{R} hat die Lösungen

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - t}, & t \in (-\infty, \frac{1}{x(0)}), & \text{für } x(0) > 0 \\ \frac{1}{\frac{1}{x(0)} - t}, & t \in (\frac{1}{x(0)}, \infty), & \text{für } x(0) < 0 \\ 0, & t \in \mathbb{R} & \text{für } x(0) = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Lokal lässt sich jedoch jedes Vektorfeld in eindeutig maximaler Weise integrieren. Wir benutzen als Blackbox:

Lemma 5.10. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

(i) $\forall p \in M: \exists_1$ maximale Integralkurve von X durch p , d.h. ein offenes Intervall $I_p \ni 0$ und eine differenzierbare Abbildung $I_p \ni t \mapsto \Phi_t(p) \in M$ s.d. $\Phi_t(p)$ das Anfangswertproblem

$$\Phi_0(p) = p, \quad \dot{\Phi}_t(p) = X_{\Phi_t(p)} \in T_{\Phi_t(p)}M \quad (5.23)$$

für alle $t \in I_p$ löst und falls $\tilde{\Phi}: \tilde{I} \rightarrow M$ eine andere Lösung des AWP (5.23) ist, dann gilt $\tilde{I} \subset I_p$ und $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\tilde{I}}$.

(ii) $\forall p \in M: \exists$ Umgebung⁶ $U \ni p$ und ein offenes Intervall I_U s.d. $0 \in I_U \subset I_q$ $\forall q \in U$ und $\Phi: I_U \times U \rightarrow M$, $(t, q) \mapsto \Phi_t(q)$ aus (i) differenzierbar ist. $\Phi_t(U)$ ist offen in M und $\Phi_t: U \rightarrow \Phi_t(U)$ ist ein Diffeomorphismus

Beweis. (i) folgt aus lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsätzen (Picard-Lindelöf) für die ODE in Koordinaten (5.20) durch geeignetes Fortsetzen unter Kartenwechseln. Der Punkt ist, dass differenzierbar \Rightarrow lokale Lipschitz-Bedingung. Man überlege sich zum besseren Verständnis der folgenden Aussagen, dass aus (i) insbesondere folgt, dass $I_{\Phi_t(p)} = I_p - t \forall p \in M, \forall t \in I_p$ und dass falls $t \in I_p$ und $s \in I_{\Phi_t(p)}$, dann ist $s + t \in I_p$ und $\Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_{s+t}(p)$.

(ii) folgt aus der differenzierbaren Abhängigkeit von ODE Lösungen von Parametern. Hierfür geht natürlich die Differenzierbarkeit der Funktionen v^i in (5.19) ein. \square

Denknahrung: $\cdot \Phi_t(p): I_p \rightarrow M$ ist eine Immersion $\forall p \Leftrightarrow X_p \neq 0 \forall p$.

· “Integralkurven laufen von Rand zu Rand”, d.h. die Beispiele 5.9 decken im Wesentlichen alles ab, was bei Nicht-Maximalität passieren kann.

· Eine Standard-Referenz: **W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage Springer (2000)**

Wir zeigen die folgende Verstärkung von Lemma 5.10.

Theorem 5.11. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

(i) Das eindeutig maximale Flussgebiet

$$\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid p \in M, t \in I_p\} \quad (5.24)$$

⁶Zur Erinnerung: Unsere Umgebungen sind per Definition offen.

§5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

ist offen in $\mathbb{R} \times M$.

(ii) Mit $M_t := \{p \in M \mid t \in I_p\}$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt: M_t ist offen in M und $\Phi_t : M_t \rightarrow M_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus.

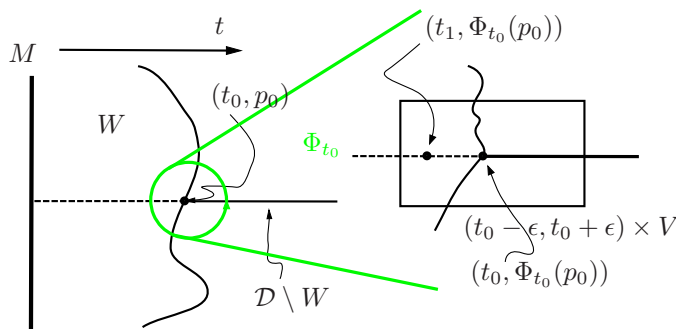
Beweis. (i) Zunächst die Bemerkung, dass es für die meisten Anwendungen genügt zu wissen, dass \mathcal{D} eine (offene) Umgebung von $\{0\} \times M$ enthält (lokaler Fluss). Dies folgt bereits aus der Tatsache, dass $\forall p \in M$ die $I_U \times U$ aus (5.10) (ii) in \mathcal{D} enthalten sind. Insbesondere reicht dies aus, um das erzeugende Vektorfeld aus seinem lokalen Fluss zurückzugewinnen. Was es noch auszuschliessen gilt, ist dass die U für wachsendes I_U nicht auf nicht offene Mengen zusammenschrumpfen.

· Es sei $W := \cup I_U \times U$, wobei die Vereinigung über alle Paare (I_U, U) läuft mit $U \subset M$ nicht leer offen, $0 \in I_U$ offen und $I_U \subset I_q \forall q \in U$. Dann ist W offen in $\mathbb{R} \times M$ und offenbar $W \subset \mathcal{D}$. Wir behaupten, dass $W = \mathcal{D}$.

· Andernfalls existiert ein $(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$, wobei wir o.E. $\tau > 0$ annehmen. Wir setzen

$$t_0 := \inf\{t \mid (t, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W\} \quad (5.25)$$

Dann ist $t_0 > 0$ (wegen 5.10 (ii)) und nach Definition $t_0 \in I_{p_0}$. Da W offen ist, gilt $(t_0, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$ (sonst gäbe es eine Umgebung von (t_0, p_0) in W und t_0 wäre nicht das Infimum).



Nach 5.10 (ii) existiert ein Intervall $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ (o.E. $t_0 - \epsilon > 0$), eine Umgebung V von $\Phi_{t_0}(p_0)$ und eine Lösung $\Psi : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times V \rightarrow M$ des AWP's $\dot{\Psi}_t(q) = X_{\Psi_t(q)}$ $\Psi_{t_0}(q) = q \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon), q \in V$. Wähle $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0)$. Dann ist $(t_1, p_0) \in W$ (denn $t_1 < t_0$) und nach Definition von W existiert eine Produktumgebung $I_U \times U$ von (t_1, p_0) mit $0 \in I_U \subset I_q \forall q \in U$.

· Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des AWP's für p_0 gilt

$$\Psi_{t_1}(\Phi_{t_0}(p_0)) = \Phi_{t_1}(p_0) \quad (5.26)$$

und wegen der Offenheit von Ψ_{t_1} ist $\Psi_{t_1}(V)$ eine Umgebung von $\Phi_{t_1}(p_0)$. Wegen der Stetigkeit von $\Phi_{t_1} : U \rightarrow M$ ist daher

$$\tilde{U} := U \cap \Phi_{t_1}^{-1}(\Psi_{t_1}(V)) \quad (5.27)$$

eine Umgebung von p_0 . Wegen $t_1 \in I_U \cap (t_0 - \epsilon, \epsilon)$ ist

$$I_{\tilde{U}} := I_U \cup (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad (5.28)$$

ein Intervall mit $0 \in \tilde{I}_{\tilde{U}}$. Für $q \in \tilde{U}$ ist

$$I_{\tilde{U}} \ni t \mapsto \begin{cases} \Phi_t(q) & t \in I_U \\ \underbrace{\Psi_t(\Psi_{t_1}^{-1}(\Phi_{t_1}(q)))}_{\in V} & t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \end{cases} \quad (5.29)$$

(wohldefiniert und) eine Lösung des AWP, so dass $I_{\tilde{U}} \subset I_q \forall q \in \tilde{U}$. Wegen $(t_0, p_0) \in I_{\tilde{U}} \times \tilde{U}$ folgt $(t_0, p_0) \in W$, ein Widerspruch.

(ii) Die Offenheit von M_t (dem Teil von M , auf dem der Fluss mindestens für die Zeit t existiert) folgt sofort aus der Offenheit von \mathcal{D} . Die Bijektion mit M_{-t} folgt aus den Bemerkungen im Beweis von 5.10 (i). (Nämlich: $I_{\Phi_t(p)} = I_p - t$), die Differenzierbarkeit aus 5.10 (ii). Die Umkehrabbildung ist Φ_{-t} ebenfalls differenzierbar, daher ein Diffeomorphismus. \square

Definition 5.12. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heisst vollständig, wenn sein maximales Flussgebiet $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$ ist, d.h. die Integralkurven $\Phi_t(p)$ existieren für alle $t \in \mathbb{R}$, $\forall p \in M$.

Beispiel. Vektorfelder mit kompaktem Träger sind vollständig. (Der Träger wird jedenfalls durch endlich viele U überdeckt, für die ein offenes Intervall $I_U \ni 0$ existiert, s.d. $I_U \subset I_q \forall q \in U$. Der Durchschnitt dieser I_U enthält ein Intervall der Form $[-\epsilon, \epsilon]$ für $\epsilon > 0$. Es folgt, dass die Integralkurven $\forall p \in M$ mindestens für $\epsilon > 0$ und dann für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren.)

· Insbesondere ist auf einer kompakten Mannigfaltigkeit jedes Vektorfeld vollständig.

Die Lie-Ableitung

Wir können nun von Vektorfeldern $X \in \mathfrak{X}(M)$ erzeugte lokale Flüsse zur Definition eines ersten Ableitungsbegriffs für (andere) Vektorfelder benutzen. Die geometrische Idee dabei ist die Identifikation der Tangentialräume entlang der Integralkurven von X , die uns erlaubt, die Ableitung in einem festen, endlich-dimensionalen Vektorraum durchzuführen.

· Die gleiche Idee steckt dann auch hinter den weiteren Ableitungsbegriffen von Tensor- und allgemeinen Vektorfeldern.

· Zur Auswertung der Ableitung bevorzugen wir aber dann die algebraische (leicht unendlich-dimensionale) Charakterisierung von Vektorfeldern und Diffeomorphismen. In Ergänzung von Lemma 5.5 ($\text{Der}(\mathcal{F}(M)) = \mathfrak{X}(M) \subset \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(M))$) gilt:

“Lemma” 5.13. (i) Die Abbildung

$$\text{Diff}(M) \ni F \mapsto F^* \in \text{Aut}(\mathcal{F}(M)) \subset \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(M)) \quad (5.30)$$

ist ein Anti-Isomorphismus von Gruppen.

(ii) Ist $t \mapsto \Phi_t \in \text{Diff}(M)$ der von $X \in \mathfrak{X}(M)$ erzeugte lokale Fluss, so gilt in der von der Topologie der punktweise Konvergenz auf $\mathcal{F}(M)$ induzierten Topologie der funktionenweise Konvergenz auf $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(M))$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_t^* - \text{id}_{\mathcal{F}(M)}) = X \quad (5.31)$$

Beweis. (i) Die Aussage, dass $F^* \in \text{Aut}(\mathcal{F}(M))$, war eine Übungsaufgabe. Anti-Isomorphismus ist äquivalent zu $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ und Bijektivität. Injektivität folgt aus der Punktstrennung durch $\mathcal{F}(M)$, nur die Surjektivität (d.h. die Rekonstruktion eines Diffeomorphismus aus einem Algebra-Automorphismus) erfordert

§5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

einen grösseren Umweg, den wir jetzt nicht beschreiten wollen (wird nachgeliefert, Stichwort: Gelfand-Dualität).

(ii) Mit der funktionenweise Konvergenz ist gemeint, dass $\forall f \in \mathcal{F}(M)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_t^*(f) - f) = X(f) \quad (5.32)$$

worunter in der punktweise Konvergenz zu verstehen ist, dass

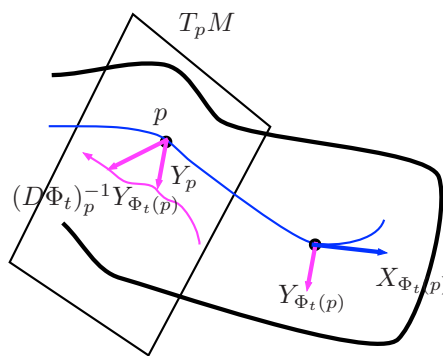
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_t^*(f)(p) - f(p)) = X(f)(p) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\Phi_t(p)) - f(p)) = X_p(f) \quad (5.33)$$

was genau der Zusammenhang zwischen X und Φ aus Lemma 5.8 ist. \square

Bemerkungen. Die Aussage mag so formuliert scheinen, dass Φ_t tatsächlich in einem ganzen offenen Intervall definiert ist. Da es sich aber um (auf M) lokale Betrachtung handelt, genügt es, dass \mathcal{D} eine offene Umgebung von $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ ist.

Ist dann $t \mapsto \Phi_t$ ein lokaler Fluss mit $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^* = X$ und $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ein weiteres Vektorfeld, so erhält man für jedes $p \in M$ eine Abbildung eines offenen Intervalls um 0 nach $T_p M$,

$$t \mapsto (Y^{(\Phi_t)})_p := (D\Phi_t^{-1})_{\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)} \in T_p M \quad (5.34)$$



Theorem 5.14. Die Abbildung (5.34) ist eine differenzierbare Kurve durch Y_p in $T_p M$. Die Lie-Ableitung von Y nach (dem Fluss von) X ,

$$p \mapsto (L_X Y)_p := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y^{(\Phi_t)})_p \in T_{Y_p} T_p M \cong T_p M \quad (5.35)$$

ist ein differenzierbares Vektorfeld, und zwar gleich der Lie-Klammer von $X, Y \in \text{Der}(\mathcal{F}(M))$:

$$L_X Y(f) = [X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (5.36)$$

Die Klammer erfüllt $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), f \in \mathcal{F}(M)$:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anti-Symmetrie)

(ii) $[X, Y + fZ] = [X, Y] + f[X, Z] + (Xf)Z$ ($\mathcal{F}(M)$ -Modul Derivation)

(iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

und macht insbesondere $\mathfrak{X}(M)$ zu einer Lie-Algebra.

Beweis. · Die Wohldefiniertheit von $[X, Y] \in \text{Der}(\mathcal{F}(M))$ sowie die algebraischen Eigenschaften der Klammer rechnet man bequem direkt nach.

· Die Aussagen zur Differenzierbarkeit sieht man am Direktesten in Koordinaten um p , in denen insbesondere

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \quad (5.37)$$

· Die Identifikation von $L_X Y$ mit $[X, Y]$ in Koordinaten erfordert die Lösung des AWP's wenigstens in erster Ordnung, beispielsweise durch Wahl von Koordinaten, in denen $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, d.h.

$$\Phi_t(x^1, \dots, x^n) = (x^1 + t, \dots, x^n) \quad (5.38)$$

· Konzeptionell befriedigender ist die formale Rechnung mit Lemma 5.13: Nach der in (5.35) benutzten kanonischen Identifikation gilt für $f \in \mathcal{F}(M)$, mit $(df)_p \in (T_p M)^\vee \cong (T_{Y_p} T_p M)^\vee$ (Dualräume von endlich-dimensionalen Vektorräumen) (vgl. auch (5.12))

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p(f) &= (L_X Y)_p(df_p) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y^{(\Phi_t)})_p \right) \underbrace{(df_p)}_{\in (T_{Y_p} T_p M)^*} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left((Y^{(\Phi_t)})_p \underbrace{(df_p)}_{\in (T_p M)^*} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((D\Phi_t^{-1})_{\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)}(f) - Y_p(f) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left((\Phi_t^* \circ Y \circ \Phi_t^{-*})(f)(p) - Y(f)(p) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\Phi_t^* \circ Y \circ (\Phi_t^{-*} - \text{id}_{\mathcal{F}(M)})(f)(p) \right) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y \circ (\Phi_t^* - \text{id}_{\mathcal{F}(M)})(f)(p) \right) \\ &= -Y(X(f))(p) + X(Y(f))(p) \end{aligned} \quad (5.39)$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass der Fluss $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$ von $-X$ erzeugt wird, sowie die Stetigkeit von $Y \circ \text{etc.}$ in der oben diskutierten Topologie. (Diese sieht man evtl. auch wieder am besten in Koordinaten.) \square

Beispiel. Auf $M = S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir das Tangentialvektorfeld

$$Z := \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \Big|_{S^2} \quad (5.40)$$

(Dies ist tatsächlich in $TS^2 = \text{Ker}(d(x^2 + y^2 + z^2)) \subset \mathbb{R}^3$, denn

$$Z(x^2 + y^2 + z^2) = 2xy - 2yx = 0 \quad (5.41)$$

Der Fluss von Z ist

$$\begin{aligned} (x, y, z)(t) &:= \Phi_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, y \cos t + x \sin t, z) \\ \left(\text{denn: } \frac{d}{dt} \Phi_t(x, y, z) &= \underbrace{(-x \sin t - y \cos t)}_{=-y(t)}, \underbrace{(-y \sin t + x \cos t)}_{=x(t)}, 0 \right) = Z_{\Phi_t(x, y, z)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

§5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

Ebenso ist $X = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(M)$. Zur Berechnung der Lie-Ableitung:

$$D\Phi_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{T_{(x,y,z)}M} \quad \left(: T_{(x,y,z)}M \rightarrow T_{(x,y,z)(t)}M \right)$$

$$D\Phi_t^{-1}X_{\Phi_t(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \cos t + x \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \sin t \\ -z \cos t \\ y \cos t + x \sin t \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

mit

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} D\Phi_t^{-1}X_{\Phi_t(x,y,z)} = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z} =: Y = [Z, X] \quad (5.44)$$

Beobachtung. Aus der bemerkenswerten Antisymmetrie der Lie-Ableitung, dass nämlich $L_X Y = -L_Y X$ ergibt sich leicht:

Beh.: Y ist invariant unter dem von X erzeugten Fluss ($t \mapsto \Phi_t, I_p, \mathcal{D}, M_t$), d.h.

$$Y_{\Phi_t(p)} = (D\Phi_t)_p Y_p \quad \forall p \in M_t, \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.45)$$

$\iff X$ ist invariant unter dem von Y erzeugten Fluss ($s \mapsto \Psi_s, J_p, \mathcal{E}, M_s$), d.h.

$$X_{\Psi_s(p)} = (D\Psi_s)_p X_p \quad \forall s \in J_p, \forall p \in M \quad (5.46)$$

Bew.: Beides ist äquivalent zur Aussage, dass $[X, Y] = 0$, d.h. dass X und Y kommutieren. " \implies ": Ableiten von (5.45) ergibt $(L_X Y)_p = 0$. " \impliedby ": Die Kurve (5.34) ist konstant, denn

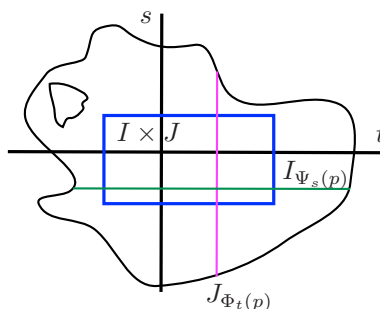
$$\frac{d}{dt} (D\Phi_t^{-1}) Y_{\Phi_t(p)} = D\Phi_t^{-1} (L_X Y)_{\Phi_t(p)} \quad \forall t \in I_p \text{ (Kettenregel)} \quad (5.47)$$

Noch einmal integriert gilt:

Theorem 5.15. $[X, Y] = 0 \iff$ Die von X und Y erzeugten lokalen Flüsse

kommutieren, in dem Sinne dass $\forall p \in M$ gilt: Sind I und J offene Intervalle um 0 s.d. $J \subset J_p$ und $I \subset I_{\Psi_s(p)} \forall s \in J$ ($\iff \Phi_t(\Psi_s(p))$ ist definiert $\forall (t, s) \in I \times J$), dann ist auch $I \subset I_p$ (klar!) und $J \subset J_{\Phi_t(p)} \forall t \in I$ und es gilt

$$\Phi_t \circ \Psi_s(p) = \Psi_s \circ \Phi_t(p) \quad \forall (t, s) \in I \times J \quad (5.48)$$



(Globale Flüsse kommutieren im naiven Sinne genau dann, wenn $[X, Y] = 0$.)

Beweis. · Angenommen, $[X, Y] = 0$. Dann ist nach der obigen Beobachtung Y invariant unter Φ_t , d.h. $\forall q \in M_t$ ist $(D\Phi_t)_q Y_q = Y_{\Phi_t(q)}$. Dann angenommen, dass $\Phi_t(\Psi_s(p))$ definiert ist $\forall (t, s) \in I \times J$, so ist $\forall t \in I$:

$$J \ni s \mapsto \Phi_t(\Psi_s(p)) \quad (5.49)$$

eine differenzierbare Kurve in M mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_t(\Psi_s(p)) &= (D\Phi_t)_{\Psi_s(p)} Y_{\Psi_s(p)} \quad (\text{Kettenregel}) \\ (\Phi\text{-Invarianz von } Y, \\ \text{beachte } t \in I_{\Psi_s(p)} \forall s) &= Y_{\Phi_t(\Psi_s(p))} \end{aligned} \quad (5.50)$$

mit $0 \mapsto \Phi_t(p)$. M.a.W. ist dies eine Integralkurve von Y zum Anfangspunkt $\Phi_t(p)$. Wegen der Maximalität in 5.10 (i) folgt $s \in J_{\Phi_t(p)}$ und

$$\Psi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_t(\Psi_s(p)) \quad (5.51)$$

Beachte: In allen Fällen gilt $\forall p \in M: \exists \delta > 0$ s.d. $[-\delta, \delta] \subset J_p$. Dann wird das Kompaktum $\Psi_{[-\delta, \delta]}(p)$ überdeckt durch endlich viele Umgebungen U , Faktoren von $I_U \times U$ aus 5.10 (ii). Der Schnitt der zugehörigen I_U enthält ein offenes Intervall $I \ni 0$, sagen wir $I = (-\epsilon, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$. Dann erfüllen I und $J = (-\delta, \delta)$: $I \subset I_{\Psi_s(p)} \forall s \in J$.

· Die Kommutativitätsvoraussetzung an die Flüsse impliziert also bereits, dass $\Phi_t(\Psi_s(p)) = \Psi_s(\Phi_t(p))$ für alle (t, s) in einem nicht-entarteten Rechteck um $(0, 0)$. Daraus folgt durch Ableiten für festes t :

$$(D\Phi_t)_p Y_p = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Phi_t(\Psi_s(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Psi_s(\Phi_t(p)) = Y_{\Phi_t(p)} \quad (5.52)$$

und daraus

$$(L_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((D\Phi_t^{-1})_{\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y_p = 0 \quad (5.53)$$

d.h. $[X, Y]_p = 0 \forall p \in M$. □

Zusammenfassung Die Lie-Klammer gibt ein erstes Beispiel für die Ableitung von Vektorfeldern (entlang anderen) via Identifikation der (Tangential-)Vektorräume entlang von (Integral-)Kurven. Als solches spielt sie im Folgenden zwar eine nützliche ‘‘Zuschauerrolle’’, sie entfaltet ihre volle Wirkungskraft aber erst im Zusammenhang der eigentlichen Lie-Gruppen.

Integrabilität

Mit unserer zweiten(?) Anwendung von Vektorfeldern illustrieren wir ein anderes wiederkehrendes Problem der Differentialgeometrie, das Auffinden von an spezielle Aufgaben angepasste Koordinaten, vgl. schon 4.5 und 4.12.

· Die motivierende Beobachtung ist, dass die in Karten (U, φ) durch die Koordinatenbasis $(\frac{\partial}{\partial x^i}_q)$ von $T_q M = T_q U$ an jedem $q \in U$ definierten lokale Schnitte von TM

(i) kommutieren, $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$ (Symmetrie der 2. Ableitung)

(ii) an jedem $q \in U$ $T_q U$ aufspannen.

(i) ist der Ausdruck davon, dass die durch die $\frac{\partial}{\partial x^i}$ lokal erzeugten Flüsse,

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^i + t^i, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n \quad (5.54)$$

§5. VEKTORFELDER UND FLÜSSE

dort wo definiert kommutieren.

(ii) bedeutet, dass wir die Flusszeiten t^i in einer Rechteckumgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ als Koordinaten auf M benutzen können.

Eine Umkehrung dieses Zusammenhangs lautet:

Theorem 5.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und X_1, \dots, X_k paarweise kommutierende und an jedem Punkt in einer offenen Menge $W \subset M$ linear unabhängige Vektorfelder ($\Rightarrow k \leq n$, die X_i müssen nicht auf ganz M definiert sein). Dann gilt: $\forall p \in W$ existiert eine Karte (U, φ) um p s.d. $U \subset W$ und

$$X_{iq} = \frac{\partial}{\partial x^i_q} \quad \forall q \in U, i = 1, \dots, k \tag{5.55}$$

Ist $L \subset W$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $l = n - k$ und $p \in L$ so, dass

$$\text{span}_{\mathbb{R}}(X_{1p}, \dots, X_{kp}) + T_p L = T_p M \tag{5.56}$$

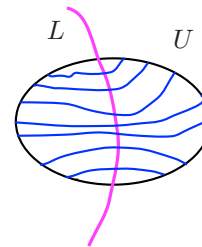
dann können die Koordinaten so gewählt werden, dass

$$L \cap U = \{q \in U \mid \varphi^1(q) = 0, \dots, \varphi^k(q) = 0\} \tag{5.57}$$

Bemerkungen. Ist (V, χ) eine andere Karte von M um p mit $X_{jq} = \frac{\partial}{\partial y^j_q} \forall q \in U, j = 1, \dots, k$, so folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad i = 1, \dots, k \tag{5.58}$$

auf $U \cap V$, dass dort $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = 0 \forall i = 1, \dots, k, j = k + 1, \dots, n$, und daraus, dass in einer geeigneten Umgebung von p der Kartenwechsel $\chi \circ \varphi^{-1}$ die Unterräume $(x^{k+1}, \dots, x^n) = \text{const.}$ in differenzierbarer Weise auf Unterräume $(y^{k+1}, \dots, y^n) = \text{const.}$ abbildet. Man sagt: (L und) die kommutierenden Vektorfelder X_1, \dots, X_k bestimmen lokal eine (durch L



parametrisierte) Zerlegung ("Blätterung") von W in Integralmannigfaltigkeiten (Blätter) der Vektorfelder X_1, \dots, X_k . (Der Punkt: Die Integralkurven der X_i sind gerade die $x_j = \text{const.}, j \neq i$. Das globale Bild ist komplizierter, mehr später.

Beweis von 5.16. · Ist keine L gegeben, so sei in einer Karte (V, χ) von M um p o.E.

$$(X_i^j(q))_{i,j=1,\dots,k} \tag{5.59}$$

für alle $q \in V$ von vollem Rang. (Dass dies in p geht ist klar, darüber hinaus notfalls durch Verkleinern von V .) Dann erfüllt die Menge

$$\{q \in V \cap W \mid (\chi^1(q), \dots, \chi^k(q)) = (\chi^1(p), \dots, \chi^k(p))\} \tag{5.60}$$

die an L gestellten Bedingungen und wir benutzen sie an ihrer Stelle. (Der Tangentialraum an dieses L ist $\text{span}_{\mathbb{R}}(\frac{\partial}{\partial y^{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n})$.)

· Aus Überlegungen wie im Beweis von 5.15 folgt die Existenz von $\epsilon > 0$ und einer (relativ) offenen Menge $W \subset L$ mit $p \in W$ s.d. die Verkettungen

$$\Phi_{t^1}^{(1)} \circ \dots \circ \Phi_{t^k}^{(k)}(o) =: \Xi(t^1, \dots, t^k, o) \quad (5.61)$$

der von X_i erzeugten Flüsse $\Phi^{(i)} \forall (t^1, \dots, t^k) \in (-\epsilon, \epsilon)^k, o \in W$ definiert sind.

· Aus 5.15 selbst folgt wegen der Kommutativität der X_i , dass die Flüsse selbst auch $\forall o \in W$ kommutieren, d.h. es kommt in (5.61) nicht auf die Reihenfolge der $\Phi^{(i)}$ an.

· oBdA nehmen wir an, dass W ein Kartengebiet ist, d.h. $\exists \psi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, Diffeomorphismus auf ihr Bild.

· $\Xi : (-\epsilon, \epsilon)^k \times W \rightarrow M$ ist differenzierbar mit partiellen Ableitungen in $(0, p)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^i} \Xi(0, p) &= X_{i_p} \\ D_o \Xi(0, p) &= (T_p L \hookrightarrow T_p M) \end{aligned} \quad (5.62)$$

(Letzteres folgt einfach aus $\Xi(0, p) = p$.) Nach Voraussetzung (5.56) ist dies ein linearer Isomorphismus und daher existiert nach dem Satz über die Umkehrabbildung 4.6 eine offene Umgebung U von p in M s.d. $\Xi^{-1}(U)$ offen in $(-\epsilon, \epsilon)^k \times W$ ist und $\Xi : \Xi^{-1}(U) \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus.

$$\varphi := (\text{id}_{\mathbb{R}^k}, \psi) \circ \Xi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5.63)$$

ist dann die geforderte Karte von M um p . (Erst in die Verifikation von $X_{i_q} = \frac{\partial}{\partial t^i} q$ $\forall q \in U, i = 1, \dots, k$ geht die Kommutativität der Flüsse ein.) \square

§ 6 Vektorbündel 1

Auch unabhängig von dem Verlangen nach einem metrischen Tensor fehlen unserer angekündigten Verallgemeinerung der Vektoranalysis auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten unter anderem noch (i) eine Diskussion von höheren Ableitungen zur weiteren Approximation von Funktionen und Abbildungen sowie (ii) ein Integralbegriff als Umkehrung dieser Ableitung(en).

Auch ist unser Begriff der Ableitung von Vektorfeldern noch nicht wirklich zufriedenstellend, hängt doch $(L_X Y)_p$ nicht nur von X_p sondern tatsächlich vom Vektorfeld X in einer (wenn auch nur infinitesimalen) Umgebung von p ab. Geometrisch gesehen erfordert die Lie-Ableitung nicht nur die Identifikation des Tangentialraums entlang von Kurven, sondern darüber hinaus die Auszeichnung spezieller Kurvenscharen (den Integralkurven von X).

Beispielsweise ist im Zusammenhang von (i) für eine differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (wie auch schon für offene Mengen im \mathbb{R}^n) die (erste) Ableitung $p \mapsto df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ keine Funktion auf M , sondern bereits ein (hier) Kovektorfeld. Da aber (im Unterschied zum \mathbb{R}^n) TM nicht kanonisch (und auch im \mathbb{R}^n nicht verträglich mit Diffeomorphismen) ein Produkt ist, können wir solche Vektorfelder nicht ohne weitere Strukturen in einzelne Richtungen ableiten.

§6. VEKTORBÜNDEL 1

Nicht ganz verkehrt, aber eben auch nicht wirklich brauchbar, ist die Globalisierung von df zu einer differenzierbaren Abbildung

$$\begin{aligned} df : TM &\rightarrow T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (p, v) = (v \in T_p M) &\mapsto (f(p), v(f)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

(Auf der rechten Seite ist die Identifikation $T\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ unter Ausnutzen der Körperstruktur von \mathbb{R} kanonisch. Insbesondere macht die Projektion auf den zweiten Faktor Sinn.) In den Koordinaten von TM aus 5.1 ist

$$df^{(\Phi)}(x, v) = (f^{(\varphi)}(x), \partial_i f^{(\varphi)}(x) v^i) \quad (6.2)$$

Das Differential von df ist eine lineare Abbildung

$$D(df)_{(p,v)} : T_{(p,v)} TM \rightarrow T_{(f(p), v(f))} T\mathbb{R} \quad (6.3)$$

mit der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \partial_i f^{(\varphi)}(x) & 0 \\ \partial_i \partial_j f^{(\varphi)}(x) v^j & \partial_j f^{(\varphi)}(x) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2n, \mathbb{R}) \quad (6.4)$$

bezüglich der Koordinatenbasis von $T_{(p,v)} TM$ zu Φ . M.a.W. ist für $(w, \alpha) \in T_{(p,v)} TM = T_{\Phi(p,v)}(\varphi(U) \times \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$

$$D(df)_{(p,v)}(w, \alpha) = (\partial_i f^{(\varphi)} w^i, \partial_i \partial_j f^{(\varphi)} v^j w^i + \partial_j f^{(\varphi)} \alpha^j) \quad (6.5)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite ist ein Ausdruck davon, dass $T_{(p,v)} M$ zwar in der exakten Sequenz

$$T_v T_p M \longrightarrow T_{(p,v)} TM \xrightarrow{D\pi_{(p,v)}} T_p M \quad (6.6)$$

(wobei $\pi : TM \rightarrow M$ die kanonische Submersion ist) sitzt, aber selbst mit der Identifikation $T_v T_p M \cong T_p M$ keine kanonische (“koordinatenunabhängige”) Spaltung als $T_p M \oplus T_p M$, und verhindert die Interpretation von (Teilen von) $D(df)_{(p,v)}$ als bilineare Abbildung $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Bedeutung von (6.6): $T_p M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von TM , mit Tangentialraum $T_v T_p M \hookrightarrow T_{(p,v)} TM$, und Normalenraum $N_{(p,v)} T_p M = T_{(p,v)} TM / T_v T_p M \cong T_p M$, s. 4.14.

Die parametrisierte lineare Algebra erlaubt eine systematische Diskussion und Auflösung dieser Enigmen. Im Zusammenhang von (ii) führt dies auf Differentialformen und ihre Integration, den Stokesschen Satz auf Mannigfaltigkeiten und bei Vervollständigung auf geometrische Masstheorie.

Definition 6.1. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ein (reelles) Vektorbündel vom Rang $r \in \mathbb{N}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E (der Dimension $n + r$) zusammen mit einer differenzierbaren Abbildung $\pi : E \rightarrow M$, deren Fasern $E_p := \pi^{-1}(p)$ für alle p mit einer Addition $+_p$ und Skalarmultiplikation \cdot_p ausgerüstet und r -dimensionale reelle Vektorräume sind, so dass gilt: $\forall p \in M \exists$ eine Umgebung U von p und ein Diffeomorphismus $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ mit den Eigenschaften:

(i) $\pi_U \circ \Phi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, wobei $\pi_U : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow U$ die Projektion auf den ersten Faktor ist, und

(ii) $\forall q \in U$ ist $\xi_U \circ \Phi|_{E_q} : E_q \rightarrow \mathbb{R}^r$ ein Vektorraumisomorphismus, wobei $\xi_U : U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist.

Ein solches Paar (U, Φ) heisst lokale Trivialisierung von E .

- Bemerkungen.*
- Aus (i) folgt, dass $\Phi(E_q) \subset \{q\} \times \mathbb{R}^r$, ξ_U in (ii) tut also nur wenig.
 - Bezeichnet für gegebenes $v \in E_p$ $v^{(\Phi)} := \xi_U(\Phi(v)) \in \mathbb{R}^r$, so ist die Abbildung $\sigma : U \rightarrow E$, $\sigma(q) := \Phi^{-1}(q, v^{(\Phi)})$ ein differenzierbarer lokaler Schnitt von E (d.h. $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ mit $\sigma(p) = v$). Mit 4.9 folgt, dass π eine Submersion von Mannigfaltigkeiten ist, wegen $E_p \neq \emptyset \forall p$ notwendig surjektiv. Mit 4.13 folgt, dass die Fasern r -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von E sind.
 - Grundlegende Beispiele von Vektorbündeln sind das sog. triviale Bündel $M \times \mathbb{R}^r$ (mit π der Projektion auf den ersten Faktor)⁷, sowie das Tangentialbündel TM , mit π wie zuvor.
 - Ist $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$ aus 6.1 ausserdem noch Kartengebiet, so ist $(\varphi \times \text{id}_{\mathbb{R}^r}) \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n+r}$ eine Karte von E .
 - Sind $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ und $X : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^r$ zwei lokale Trivialisierungen, dann folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 (U \cap V) \times \mathbb{R}^r & \xleftarrow{X} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\Phi} & (U \cap V) \times \mathbb{R}^r \\
 & \searrow \pi_V & \downarrow \pi & \swarrow \pi_U & \\
 & & U \cap V & &
 \end{array} \tag{6.7}$$

die Existenz einer differenzierbaren Abbildung $\tau : U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ (Trivialisierungswchselfunktionen oder Übergangsfunktionen) so, dass $\Phi \circ X^{-1}(q, x) = (q, \tau(q)x) \forall (q, x) \in (U \cap V) \times \mathbb{R}^r$.

- Man denkt häufig an Vektorbündel als “durch M parametrisierte Vektorräume”, und sagt daher zur Betonung manchmal auch “Totalraum von E ” zu E als differenzierbarer Mannigfaltigkeit. M heisst Basis des Vektorbündels (nicht zu verwechseln mit einer Vektorraumbasis).
- Ein Vektorbündel vom Rang 1 heisst Geradenbündel (auch: Linienbündel).

Lemma 6.2. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $E = \bigcup_{p \in M} E_p \xrightarrow{\pi} M$ eine disjunkte Vereinigung von r -dimensionalen Vektorräumen. Ist dann $((U_\alpha, \Phi_\alpha))_\alpha$ ein System von offenen Mengen $U_\alpha \subset M$ mit bijektiven Abbildungen $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, deren Einschränkung auf E_p für jedes $p \in U_\alpha$ ein linearer Isomorphismus $E_p \cong \{p\} \times \mathbb{R}^r$ ist, s.d. $\forall \alpha, \beta$ in $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} = \text{id}_{U_\alpha \cap U_\beta} \times \tau_{\alpha\beta}$ die Abbildung $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ differenzierbar ist, dann existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur auf E s.d. $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit lokalen Trivialisierungen (U_α, Φ_α) ist.*

Beweis. Wie 1.8 □

Bemerkungen. Klarerweise existiert solch ein System $((U_\alpha, \Phi_\alpha))_\alpha$ auch für jedes Vektorbündel. Dann folgt aus $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\gamma = \Phi_\alpha \circ \Phi_\gamma$ für alle Tripel α, β, γ die Bedingung

$$\tau_{\alpha\beta} \circ \tau_{\beta\gamma}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} = \tau_{\alpha\gamma}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \tag{6.8}$$

(Insbesondere $\tau_{\alpha\alpha}(q) = \text{id} \in GL(r, \mathbb{R}) \forall q \in U_\alpha$ und $\tau_{\alpha\beta}(q) = \tau_{\beta\alpha}(q)^{-1} \forall q \in U_\alpha \cap U_\beta$.)

⁷Noch trivialer ist $M \times \mathbb{R}^0 \cong M$

§6. VEKTORBÜNDEL 1

· Sind umgekehrt für eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_\alpha$ von M gegebene $\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ differenzierbar und erfüllen (6.8), so ist

$$E := \bigcup_{\alpha} (U_\alpha \times \mathbb{R}^r) / \sim \quad (6.9)$$

mit der Äquivalenzrelation $(p, x) \sim (q, y) \Leftrightarrow p = q \in U_\alpha \cap U_\beta$ und $x = \tau_{\alpha\beta}(p)y$, ein Vektorbündel vom Rang r über M .

Definition 6.3. Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Ein (globaler) Schnitt von E ist eine differenzierbare Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$. Ein lokaler Schnitt ist eine differenzierbare Abbildung $\sigma_U : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma_U = \text{id}_U$.

· Mit punktweise Addition und Multiplikation mit Funktionen wird der Raum aller differenzierbaren Schnitte, $\Gamma(E) \subset \times_{p \in M} E_p$ ein $\mathcal{F}(M)$ -Modul. $0 \in \Gamma(E)$ heisst auch Nullschnitt. Als reeller Vektorraum ist $\Gamma(E)$ i.A. unendlich-dimensional, es gibt also "sehr viele" Schnitte. Wir schreiben $\Gamma_U(E)$ für den Raum der lokalen Schnitte über U .

· Ein lokaler Rahmen ist ein r -Tupel $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ von lokalen Schnitten über U mit der Eigenschaft, dass $\forall q \in U (\sigma_a(q))_{a=1, \dots, r}$ eine Basis von E_q bilden. Ist z.B. (U, Φ) eine lokale Trivialisierung, und (b_1, \dots, b_r) die Standardbasis von \mathbb{R}^r , so ist mit $\sigma_a : q \mapsto \Phi^{-1}(q, b_a)$ $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ein lokaler Rahmen.

· Ein globaler Rahmen ist ein lokaler Rahmen auf $U = M$.

Wichtig: Während es also stets viele lokale Rahmen und auch viele globale Schnitte von Vektorbündeln gibt, ist die Existenz eines globalen Rahmens etwas sehr Spezielles. Es gilt: Ein Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ ist genau dann trivialisierbar, wenn ein globaler Rahmen existiert. Ist in diesem Fall $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ein solcher Rahmen, so ist

$$\begin{aligned} E &\cong M \times \text{span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \cong M \times \mathbb{R}^r \\ (p, v) &\mapsto (p, \text{Komponenten von } v \text{ in der Basis } (\sigma_a(p))) \end{aligned} \quad (6.10)$$

(Man überprüft leicht, dass dies ein in allen Fasern linearer Diffeomorphismus ist.)

· Existiert allerdings solch ein globaler Rahmen, so ist dieser im Allgemeinen nicht eindeutig oder kanonisch, das heisst "Ein trivialisierbares Vektorbündel ist erst dann trivial wenn es trivialisiert ist".

· Eine Mannigfaltigkeit heisst parallelisierbar, wenn ihr Tangentialbündel trivialisierbar ist.

Beispiel 6.4. · Eine Lie-Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer differenzierbaren Gruppenstruktur, d.h. Multiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ und Inversenbildung $i : G \rightarrow G$ sind differenzierbar. $\forall g \in G$ ist Linksmultiplikation $L_g : G \rightarrow G$, $L_g(h) := m(g, h)$ ein Diffeomorphismus. Sein Differential am neutralen Element $e \in G$ ist die partielle Ableitung von m nach dem zweiten Argument, daher die Abbildung $g \mapsto (DL_g)_e : T_e G \rightarrow T_g G$ differenzierbar. Ist daher $(x_1, \dots, x_n) \subset T_e G$ eine Basis des Tangentialraums am neutralen Element, so sind die globalen Schnitte $X_i : g \mapsto (DL_g)_e(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ ein globaler Rahmen von TG . (In diesem Fall ist zwar der Rahmen immer noch nicht eindeutig, die Trivialisierung $TG \cong G \times T_e G$ aber mit der Gruppenstruktur schon kanonisch.)

- Der bekannte Diffeomorphismus $SU(2) \cong S^3$ zeigt dann, dass S^3 parallelisierbar ist.
- Andererseits folgt aus der Übungsaufgabe 5.1, dass S^2 nicht parallelisierbar ist. Wäre nämlich $TS^2 \cong S^2 \times \mathbb{R}^2$, so wäre das Einheitstangentialbündel $S^2 \times S^1 \cong \mathbb{R}P^3$.
- Das Möbius-Bündel,

$$\text{Mö} := \mathbb{R}^2 / \sim, \quad (x, y) \sim (x + n, (-1)^n y) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.11)$$

mit $\pi : \text{Mö} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $[(x, y)] \mapsto [x]$ ist ein nicht-triviales Geradenbündel über S^1 . (Übungsaufgabe)

- Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum, $E = \bigcup_{W \subset V, \dim W=k} W$ (die *disjunkte Vereinigung* aller k -dimensionalen Unterräume), und $\pi : E \rightarrow G(k, V)$ (die *Menge* aller k -dimensionalen Unterräume, versehen mit der differenzierbaren Struktur aus 1.9) definiert durch

$$E \supset W \ni w \xrightarrow{\pi} W \in G(k, V) \quad (6.12)$$

(“Die Faser über $W \in G(k, V)$ ist W selbst.”) Für eine feste Zerlegung $V = P \oplus Q$ in einen k und einen $(n - k)$ -dimensionalen Unterraum, und einer Identifikation $P \cong \mathbb{R}^k$, sei dann $\pi_{(P,Q)} : V \rightarrow P$ die Projektion auf P , und

$$U_Q := \{W \in G(k, V) \mid W \cap Q = \{0\}\} \subset G(k, V) \quad (6.13)$$

und $\Phi_{(P,Q)} : \pi^{-1}(U_Q) \rightarrow U_Q \times \mathbb{R}^k$, $\Phi_{(P,Q)}(w \in W) := (W, \pi_{(P,Q)}(w))$

Dann ist offenbar $\Phi_{(P,Q)}$ bijektiv und ein linearer Isomorphismus in den Fasern. Ist $P' \oplus Q' = V$ ein weiteres Paar, mit fixiertem $P' \cong \mathbb{R}^k$, so ist auf $U_Q \cap U_{Q'}$ die Trivialisierungsfunktion gegeben durch $W \mapsto \pi_{(P',Q')} \circ (\pi_{(P,Q)}|_W)^{-1} \in GL(k, \mathbb{R})$. Dies ist differenzierbar (als Funktion von $A = \varphi_{(P,Q)}(W) \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q)$, vgl. (1.20)). Somit erfüllen die $(U_Q, \Phi_{(P,Q)})$ die Bedingungen aus 6.2 und machen E zu einem differenzierbaren Vektorbündel über $G(k, V)$, genannt das *tautologische Bündel*. (“Die Faser über $W \in G(k, V)$ ist W selbst.”)

- Übungsaufgabe: Im Spezialfall $k = 1$ ist

$$E \cong ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}) / \sim \quad (6.14)$$

$$(x^1, \dots, x^{n+1}, y) \sim (\lambda x^1, \dots, \lambda x^{n+1}, \lambda^{-1} y), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und für $n = 1$ ausserdem noch \cong Mö, insbesondere nicht-trivial. (Letzteres gilt auch für allgemeines n, k .)

Operationen auf Vektorbündeln

Definition 6.5. · Seien $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ und $E_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ Vektorbündel über M vom Rang r_1 und r_2 . Um jedes $p \in M$ existieren lokale Trivialisierungen (U_1, Φ_1) und (U_2, Φ_2) mit $U_1 = U_2 =: U$. Die (Whitney) *direkte Summe* von E_1 und E_2 ist dann das Vektorbündel mit Fasern $(E_1 \oplus E_2)_p = E_{1p} \oplus E_{2p}$ und lokalen Trivialisierungen

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \ni (v_1 \oplus v_2) \mapsto (\pi_1(v_1), \xi_1(\Phi_1(v_1)) \oplus \xi_2(\Phi_2(v_2))) \in U \times (\mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{R}^{r_2}) & & \\ \parallel & \Downarrow & \\ \pi_2(v_2) & & U \times \mathbb{R}^{r_1+r_2} \end{array} \quad (6.15)$$

§6. VEKTORBÜNDEL 1

Die Eigenschaften aus Def. 6.1 sind offensichtlich. Die Trivialisierungswchselfunktionen von $E_1 \oplus E_2$ sind $\tau_1 \oplus \tau_2 : U \cap V \rightarrow GL(r_1 + r_2, \mathbb{R})$ von der Block-Form

$$\begin{pmatrix} \tau_1(q) & 0 \\ 0 & \tau_2(q) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

· Entsprechend definiert man das Tensorprodukt von E_1 und E_2 als das Vektorbündel mit Fasern $(E_1 \otimes E_2)_p = E_{1p} \otimes E_{2p}$ und lokalen Trivialisierungen als lineare Fortsetzung von

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \ni (v_1 \otimes v_2) \mapsto (\pi_1(v_1), \xi_1(\Phi_1(v_1)) \otimes \xi_2(\Phi_2(v_2))) \in U \times (\mathbb{R}^{r_1} \otimes \mathbb{R}^{r_2}) & & \\ \parallel & \rightsquigarrow & \\ \pi_2(v_2) & & U \times \mathbb{R}^{r_1 \cdot r_2} \end{array} \quad (6.17)$$

Beachte, dass jeder Vektor in $E_{1p} \otimes E_{2p}$ eine Linearkombination von Produkten $v_1 \otimes v_2$ mit $v_i \in E_{ip}$ ist. Man kann auch einfacher schreiben:

$$\pi^{-1}(U) \ni (w \in E_{1q} \otimes E_{2q}) \mapsto (q, (\xi_1 \circ \Phi_1 \otimes \xi_2 \circ \Phi_2)(w)) \quad (6.18)$$

Die Trivialisierungswchselfunktionen sind von der Gestalt

$$\tau_1(q) \otimes \tau_2(q) = (\text{Kronecker Produkt von Matrizen}) \quad (6.19)$$

· Das zu einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ duale Bündel ist das Vektorbündel mit Fasern $(E^\vee)_p = (E_p)^\vee$ und Trivialisierungen

$$\pi^{-1}(U) \ni (\lambda \in E_q^\vee) \mapsto (q, (\xi \circ \Phi)^{-\vee}(\lambda)) \in U \times (\mathbb{R}^r)^\vee \cong U \times \mathbb{R}^r \quad (6.20)$$

wobei für $x \in \mathbb{R}^r$ $(\xi \circ \Phi)^{-\vee}(\lambda)(x) := \lambda((\xi \circ \Phi)^{-1}(x))$. Bei der letzten (nicht kanonischen) Identifikation $(\mathbb{R}^r)^\vee \cong \mathbb{R}^r$ ist eine *von $q \in U$ unabhängige* Wahl zu treffen. Die Trivialisierungswchselfunktionen sind

$$\tau(q)^{-T} = (\text{Kontragrediente Matrix}) \quad (6.21)$$

· Von besonderem Interesse ist das Vektorbündel $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) = E_1^\vee \otimes E_2$ der faserweisen linearen Abbildungen.

· Beim Begriff des Untervektorbündels und Quotientenbündels ist es wichtig, die Dimensionen des Unterraums/Quotienten festzuhalten.

Beispiel. · Das zum Tangentialbündel duale Bündel TM^\vee heisst Kotangentialbündel, seine Schnitte Eins-Formen. $\Gamma(TM^\vee) =: \Omega(M)$.

· Das in 6.4 definierte tautologische Bündel über der Grassmann-Mannigfaltigkeit ist ein Untervektorbündel des trivialen Bündels: $E \hookrightarrow G(k, V) \times V$,

$$E_W = W \hookrightarrow (G(k, V) \times V)_W = V \quad (6.22)$$

· Mit Hilfe von Übungsaufgabe 3.5 folgt

$$TG(k, V) = \text{Hom}(E, (G(k, V) \times V)/E) \quad (6.23)$$

Elementare Feststellungen sind:

Lemma 6.6. Sei E ein Vektorbündel über M , E^\vee sein duales Bündel.

- Für einen Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$ ist die Abbildung $\Gamma(E^\vee) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $\rho \mapsto (\rho(\sigma) : p \mapsto \rho_p(\sigma_p))$ $\mathcal{F}(M)$ -linear.
- Tatsächlich ist $\Gamma(E^\vee) = \text{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(\Gamma(E), \mathcal{F}(M))$.
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma(E) \times \Gamma(E^\vee) &\rightarrow \mathcal{F}(M) \\ (\sigma, \rho) &\mapsto \rho(\sigma) \end{aligned} \tag{6.24}$$

ist $\mathcal{F}(M)$ -bilinear.

Beweis. punktweises Auswerten. □

Der folgende Begriff ist für den Paralleltransport von Nutzen.

Definition 6.7. Ist $F : L \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung, und $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel über M , so existiert für jedes $p \in L$ eine lokale Trivialisierung $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ von E um $F(p)$ (sic!). Der Pullback von E via F ist das Vektorbündel $F^*(E)$ über L mit Fasern $(F^*E)_p = E_{F(p)}$ ($p \in L$) und Trivialisierungen

$$\pi^{-1}(F^{-1}(U)) \ni (v \in E_{F(q)}) \mapsto (q, \xi_U(\Phi(v))) \tag{6.25}$$

(Wegen der Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U) \ni p$ offen. Beachte, dass dies stets ein Diffeomorphismus ist.) Trivialisierungswechselfunktionen sind $F^*(\tau) = \tau \circ F$.

Beispiel. · Ist $L \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, mit Inklusion $i : L \rightarrow M$, so ist $i^*(TM) = TM|_L$ das Tangentialbündel zu M , eingeschränkt auf L . Das Normalenbündel ist das Quotientenbündel

$$N_M L = i^*(TM)/TL \tag{6.26}$$

s. auch 4.14.

· Der Rückzug von Vektorbündeln wird begleitet vom Rückzug von Schnitten: Ist $\sigma \in \Gamma(E)$, so definiert $F^*(\sigma)(p) := \sigma(F(p))$ einen Schnitt $F^*(\sigma) \in \Gamma(F^*(E))$. Die Abbildung $F^* : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F^*(E))$ ist i.A. weder surjektiv noch injektiv. Beachte: Im Falle von $E = TM^\vee$ versteht man unter dem Pullback einer Einsform $\omega \in \Omega(M)$ üblicherweise $F^{\tilde{*}}(\omega) = DF(F^*(\omega))$, wobei DF als Bündelabbildung $TL \rightarrow F^*(TM)$ aufgefasst wird. Konkret: $F^{\tilde{*}}(\omega)_p(v) = \omega_{F(p)}(DF_p(v))$ ($v \in T_p L$). Normalerweise ist aus dem Zusammenhang klar, ob F^* oder $F^{\tilde{*}}$ gemeint ist, wir unterscheiden dann auch nicht in der Notation.

Die Tensoralgebra ...

Definition 6.8. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $r, s \in \mathbb{N}_0$.

· Das Bündel der Tensoren vom Typ (r, s) über M ist das Vektorbündel

$$T^{(r,s)}M = \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_r \text{ Mal} \otimes \underbrace{TM^\vee \otimes \dots \otimes TM^\vee}_s \text{ Mal} \tag{6.27}$$

§6. VEKTORBÜNDEL 1

vom Rang n^{r+s} , mit der Vereinbarung, dass für $(r, s) = (0, 0)$ $T^{(0,0)}M = M \times \mathbb{R}$.

· Ein Tensorfeld (oder auch einfach nur: Tensor) vom Typ (r, s) ist ein differenzierbarer Schnitt von $T^{(r,s)}M$.

· Tensorfelder mit $r = 0$ heissen “kovariant”, solche mit $s = 0$ “kontravariant”.

Lemma 6.9. · $\Gamma(T^{(1,0)}M) = \mathfrak{X}(M)$, $\Gamma(T^{(0,1)}M) = \Omega(M)$, $\Gamma(T^{(0,0)}M) = \mathcal{F}(M)$

· Tensorfelder vom Typ (r, s) bilden einen $\mathcal{F}(M)$ -Modul. Mit punktweise Tensorprodukt (und der Identifikation $TM \otimes TM^\vee \cong TM^\vee \otimes TM$) wird

$$\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \Gamma(T^{(r,s)}M) \quad (6.28)$$

zu einer bigraduierten Algebra über $\mathcal{F}(M)$. Für $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ ist $f \otimes A = f \cdot A$.

Bekanntlich gilt für einen endlich-dimensionalen Vektorraum in kanonischer Weise $(V^\vee)^\vee \cong V$, und folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts daraus:

$$V \otimes W \cong \{\text{Vektor-Raum der bilinearen Abbildungen } V^\vee \times W^\vee \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (6.29)$$

Durch punktweises Anwenden folgt in Verallgemeinerung von 6.6.

Lemma 6.10. Das Datum eines Tensorfelds vom Typ (r, s) ist äquivalent zum Datum einer $\mathcal{F}(M)$ -multilinearen Abbildung

$$A : \underbrace{\Omega(M) \times \cdots \times \Omega(M)}_{r \text{ Mal}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ Mal}} \rightarrow \mathcal{F}(M) \quad (6.30)$$

m.a.W. einer Abbildung

$$M \ni p \mapsto (A_p : T_p M^\vee \times T_p M^\vee \times T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}\text{-multilinear}) \quad (6.31)$$

mit der Eigenschaft, dass $A(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s) \in \mathcal{F}(M) \forall \omega_1, \dots, \omega_r \in \Omega(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$.

· Für eine Karte (U, φ) versteht man unter den Komponenten eines Tensors bezüglich dem (lokalen) Koordinatenrahmen von TM und dualem Rahmen von TM^\vee die (lokalen) Funktionen

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = A\left(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)(p) \quad (6.32)$$

· Das Tensorprodukt von $A_1 \in \Gamma(T^{(r_1, s_1)}M)$ und $A_2 \in \Gamma(T^{(r_2, s_2)}M)$ ist in der Identifikation von 6.10

$$\begin{aligned} (A_1 \otimes A_2)(\omega_1, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_1, \dots, X_{s_1+s_2}) \\ = A_1(\omega_1, \dots, \omega_{r_1}, X_1, \dots, X_{s_1}) \cdot A_2(\omega_{r_1+1}, \dots, \omega_{r_1+r_2}, X_{s_1+1}, \dots, X_{s_1+s_2}) \end{aligned} \quad (6.33)$$

· Wichtige Unterbündel von $T^{(r,0)}M$ bzw. $T^{(0,s)}M$ sind die (total) symmetrischen und die alternierenden Tensorfelder. Antisymmetrisierung des Tensorprodukts führt für kovariante Tensoren auf die (super)-Algebra der Differentialformen

$$\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{s=0}^n \Gamma(\wedge^s TM^\vee) \quad (6.34)$$

mit dem Dachprodukt als Multiplikation.

· Die Kontraktion mit einem Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist die Abbildung von $\mathcal{F}(M)$ -Moduln

$$\begin{aligned} \iota_X : \Gamma(T^{(r,s)}M) &\rightarrow \Gamma(T^{(r,s-1)}M) \\ \iota_X(A)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_{s-1}) &= A(\omega_1, \dots, \omega_r, X, X_1, \dots, X_{s-1}) \end{aligned} \quad (6.35)$$

(Es wird also X an die erste kontravariante Stelle gefüttert.) Die Kontraktion erhält die Antisymmetrie. Schlussendlich:

Definition 6.11. · Gemäss 6.5 ist $T^{(1,1)}M = \text{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(TM, TM)$, darauf die Spur $\text{tr} : \Gamma(T^{(1,1)}M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ punktweise definiert.

· Die Verjüngung (oder Selbstkontraktion, oder partielle Spur) an den Stellen i und j ($1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq s$) ist die Abbildung von $\mathcal{F}(M)$ -Moduln

$$\begin{aligned} C_j^i : \Gamma(T^{(r,s)}M) &\rightarrow \Gamma(T^{(r-1,s-1)}M) \\ (C_j^i A)(\omega_1, \dots, \omega_{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) &= \text{tr} A(\underbrace{\omega_1, \dots, \overset{i\text{-te Stelle}}{\cdot}, \dots, \omega_{r-1}, X_1, \dots, \overset{j\text{-te Stelle}}{\cdot}, \dots, X_{s-1}}_{\in \Gamma(T^{(1,1)}M)}) \end{aligned} \quad (6.36)$$

...und eine ihrer Derivationen

Definition 6.12. Eine Tensorableitung ist eine Familie von \mathbb{R} -linearen Abbildungen

$$\delta : \Gamma(T^{(r,s)}M) \rightarrow \Gamma(T^{(r,s)}M) \quad (6.37)$$

mit

- (i) $\delta(A_1 \otimes A_2) = \delta(A_1) \otimes A_2 + A_1 \otimes \delta(A_2)$ für alle Typen von Tensorfeldern, und
- (ii) $C_j^i(\delta(A)) = \delta(C_j^i(A))$ für alle Kontraktionen auf allen möglichen Typen von Tensorfeldern.

Proposition 6.13. · Die Einschränkung einer Tensorableitung δ auf Funktionen ist eine Derivation der \mathbb{R} -Algebra $\mathcal{F}(M)$, daher nach Lemma 5.5 gegeben durch ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$.

· Die Einschränkung von δ auf $\mathfrak{X}(M)$ erfüllt dann

$$\delta(f \cdot Y) = f \cdot \delta(Y) + X(f) \cdot Y \quad (6.38)$$

· Umgekehrt setzt sich jeder Lift eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ zu einer $\mathcal{F}(M)$ -Modul Derivation von $\mathfrak{X}(M)$ in eindeutiger Weise zu einer Tensorableitung auf ganz $\mathcal{T}(M)$ fort.

§6. VEKTORBÜNDEL 1

Beweis. Nachrechnen. Der entscheidende Schritt ist die aus der Bedingung (ii) folgende Identität für $\omega \in \Omega(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}\delta(\omega(Y)) &= \delta(C_1^1(Y \otimes \omega)) = C_1^1(\delta(Y) \otimes \omega) + C_1^1(Y \otimes \delta(\omega)) \\ &= \omega(\delta(Y)) + (\delta(\omega))(Y)\end{aligned}\quad (6.39)$$

die die Fortsetzung von δ auf $\Omega(M)$ definiert und eindeutig bestimmt. \square

Beispiel 6.14. Die für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ durch $L_X Y = [X, Y]$ auf $\mathfrak{X}(M)$ definierte Lie-Ableitung auf $\mathcal{T}(M)$ erfüllt

$$L_X(\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (6.40)$$

Sind $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow M$ der von X erzeugte lokale Fluss, $A \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$ und $p \in M$, so ist $t \mapsto \Phi_t^*(A)_p$ mit

$$\begin{aligned}\Phi_t^*(A)_p(\lambda_1, \dots, \lambda_r, v_1, \dots, v_s) &:= \\ A_{\Phi_t(p)}((D\Phi_{tp})^{-\vee}(\lambda_1), \dots, (D\Phi_{tp})^{-\vee}(\lambda_r), D\Phi_{tp}(v_1), \dots, D\Phi_{tp}(v_s)) \\ &\quad (\lambda_i \in T_p M^\vee, \quad v_j \in T_p M)\end{aligned}\quad (6.41)$$

eine differenzierbare Kurve in $(T^{(r,s)}M)_p = T_p M^{\otimes r} \otimes (T_p M^\vee)^{\otimes s}$ und es gilt

$$L_X(A)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^*(A)_p \quad (6.42)$$

· Auf $\Omega^\bullet(M)$ sind ausserdem die äussere Ableitung $d : \Omega^s(M) \rightarrow \Omega^{s+1}(M)$ und die Kontraktion mit $X \in \mathfrak{X}(M)$ Super-Derivationen vom Grad 1 bzw. -1 , d.h.

$$\begin{aligned}d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{s_1} \omega_1 \wedge (d\omega_2) \\ \iota_X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= (\iota_X \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{s_1} \omega_1 \wedge (\iota_X \omega_2)\end{aligned}\quad (6.43)$$

· Diese Super-Derivationen erfüllen zusammen mit der Lie-Ableitung *Cartan's magische Formel*

$$L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X \quad (6.44)$$

Bew.: Es genügt, die Identität auf Funktionen und Einsformen zu überprüfen (welche $\Omega^\bullet(M)$ algebraisch erzeugen). (Beachte: $\Omega^\bullet(M)$ erträgt keine Kontraktionen.) Für $f \in \mathcal{F}(M)$ ist $\iota_X(f) = 0$ und per Definition $\iota_X(df) = Xf = L_X(f)$. Für $\omega \in \Omega^1(M)$ ist die linke Seite, ausgewertet auf $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}(L_X(\omega))(Y) &= L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) \quad (L_X \text{ ist eine Derivation}) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (\text{Definition})\end{aligned}\quad (6.45)$$

und die rechte

$$(\iota_X(d\omega))(Y) + d(\iota_X(\omega))(Y) = (d\omega)(X, Y) + Y(\omega(X)) \quad (6.46)$$

Die Identität ist also äquivalent zur Formel

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (6.47)$$

Diese folgt aus der Tatsache, dass $\Omega^1(M)$ über \mathbb{R} lokal endlich von Eins-Formen der Form $f \cdot dg$ für $f, g \in \mathcal{F}(M)$ erzeugt wird und

$$\begin{aligned}
 (d(f \cdot dg))(X, Y) &= (df \wedge dg)(X, Y) = (df \otimes dg - dg \otimes df)(X, Y) \\
 &= X(f)Y(g) - X(g)Y(f) \\
 &= X(f \cdot Y(g)) - Y(f \cdot X(g)) - f \cdot [X, Y](g) \\
 &= X(f \cdot dg(Y)) - Y(f \cdot dg(X)) - f \cdot dg([X, Y])
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

□

KAPITEL 2

RIEMANNSCHE GEOMETRIE

Rekapitulation: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind per Definition lokal diffeomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Vektorbündel sind per Definition lokal trivialisierbar, d.h. faserweise linear diffeomorph zu Produkten $U \times \mathbb{R}^r$. Die Tatsache, dass diese Diffeomorphismen nicht ohne weitere Struktur kanonisch sind, hat bisher eine Identifikation der Fasern über verschiedenen Punkten von M , und damit die Definition einer Ableitung von Vektorfeldern verhindert. (Wie wir in Beispielen gesehen haben, sind Vektorbündel im Allgemeinen auch nicht global trivialisierbar, so dass wir selbst wenn wir wollten, die Ableitung nicht in einem einzigen Vektorraum durchführen könnten.)

· Sind etwa $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_U^n, \chi : V \rightarrow \mathbb{R}_V^n$ zwei Karten von M mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist die Identifikation $\mathbb{R}_U^n \cong T_p M \cong \mathbb{R}_V^n$ für $p \in U \cap V$, gegeben durch $D(\chi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$, im Allgemeinen verschieden von der zu $q \in U \cap V, q \neq p$. $T_p M$ lässt sich also nicht mit $T_q M$ identifizieren. Gemäss Übungsaufgabe 5.1 ist TS^2 nicht trivialisierbar.

· Die Bedeutung von Geometrie als *Landvermessung*, d.h. dem “Herumtragen von Messlatten, Linien ziehen und Dinge Messen”, motiviert dann zweierlei:

(i) Wir identifizieren unsere Vektorräume nicht allgemein, sondern nur entlang von Kurven, was zum Ableiten genau ausreicht. Dabei spielt es eine wichtige Rolle, dass wir Vektorbündel über Kurven immer trivialisieren, und ausserdem die Freiheiten bei der Trivialisierung durch einen sog. Zusammenhang vollständig parametrisieren können.

(ii) Wir führen einen metrischen Tensor ein. Dass uns dies (auf fast wundersame Weise) die Auszeichnung eines eindeutigen Zusammenhangs auf dem Tangentialbündel erlaubt, illustrieren wir am Beispiel von Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m .

Lemma $\frac{13}{2}.1$. *Jedes Vektorbündel $\pi : E \rightarrow I$ über einem offenen (auch unbeschränkten) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist global trivialisierbar, d.h. \exists ein Diffeomorphismus $\Phi : E \xrightarrow{\cong} I \times \mathbb{R}^r$ s.d. $\pi_I \circ \Phi = \pi$ und $\forall t \in I \Phi|_{E_t} : E_t \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein linearer Isomorphismus ist*

Beweis. Strategie: Wir zeigen, dass E in einer Umgebung eines jeden kompakten Teilintervalls $K \subset I$ trivialisierbar ist, und schliessen durch Ausschöpfung.

Hilfslemma: Seien (J, X) und (L, Ψ) lokale Trivialisierungen von E über zwei offenen Intervallen $J, L \subset I$ mit $J \cap L, J \setminus L$ und $L \setminus J$ alle nicht leer. Dann existiert eine lokale Trivialisierung $(J \cup L, \Xi)$ mit $\Xi = X$ in einer Umgebung von $J \setminus L$.

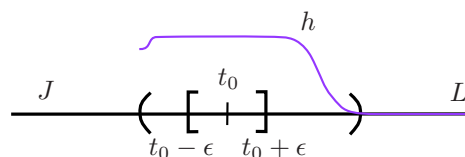
Bew.: Wir behandeln den Fall dass $L \setminus J > J \setminus L$, der andere Fall geht analog.

· Es sei $\tau : J \cap L \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ ($r = \text{Rang von } E$) die Trivialisierungswechselfunktion, d.h. es gilt

$$\Psi \circ X^{-1}(t, x) = (t, \tau(t)x) \quad \forall (t, x) \in (J \cap L) \times \mathbb{R}^r \quad \left(\frac{13}{2}.1\right)$$

· Wir fixieren $t_0 \in J \cap L$ und interpretieren (tautologisch) $\tau(t)$ als die Lösung (Fundamentalmatrix) der gewöhnlichen (matrixwertigen) homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{\sigma}(t) = -A(t) \cdot \sigma(t)$, mit der differenzierbaren Funktion $A : J \cap L \rightarrow \text{Mat}(r, \mathbb{R})$, $A(t) := -\dot{\tau}(t)\tau(t)^{-1}$ und dem Anfangswert $\sigma(t_0) = \tau(t_0)$.

· Wähle dann $\epsilon > 0$ mit $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset J \cap L$ und eine differenzierbare Funktion $h : L \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(t) = 1$ für $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und $h = 0$ in einer Umgebung von $L \setminus J$.



· Die durch 0 auf $L \setminus J$ fortgesetzte Funktion $\tilde{A}(t) := h(t)A(t) \in \text{Mat}(r, \mathbb{R})$ ist dann auf ganz L differenzierbar, und die Fundamentalmatrix $\tilde{\tau}(t)$ der modifizierten linearen Differentialgleichung

$$\dot{\sigma}(t) = -\tilde{A}(t) \cdot \sigma(t), \quad \sigma(t_0) = \tau(t_0) \quad \left(\frac{13}{2}.2\right)$$

existiert auf ganz L (die Lipschitz-Konstante eines linearen AWP's ist unabhängig vom Anfangswert). Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen gilt $\tilde{\tau}(t) \in GL(r, \mathbb{R}) \forall t \in L$ und $\tilde{\tau}(t) = \tau(t)$ für $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Mit $(\frac{13}{2}.1)$ folgt insbesondere

$$X^{-1}(t, x) = \Psi^{-1}(t, \tilde{\tau}(t)x) \quad \forall (t, x) \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times \mathbb{R}^r \quad \left(\frac{13}{2}.3\right)$$

· Daher ist

$$\begin{aligned} \Xi^{-1} &: (J \cup L) \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}(J \cup L) \\ \Xi^{-1}(t, x) &:= \begin{cases} X^{-1}(t, x) & \text{falls } t < t_0 + \epsilon \\ \Psi^{-1}(t, \tilde{\tau}(t)x) & \text{falls } t > t_0 - \epsilon \end{cases} \end{aligned} \quad \left(\frac{13}{2}.4\right)$$

wohldefiniert, und ein faserweise linearer Diffeomorphismus. Seine Umkehrung ist die gewünschte Trivialisierung von E über $J \cup L$. \square

· Für ein kompaktes Intervall $K \subset I$ sei $\{J_k \subset I\}$ eine endliche Überdeckung durch offene Intervalle mit Trivialisierungen X_k . Für $L_1 := J_1$ gilt entweder $K \subset L_1$ und wir halten, oder es existiert ein $k_2 \neq 1$ so dass $L_1 \cap J_{k_2} \neq \emptyset$. Wir erhalten dann eine Trivialisierung auf $L_2 := L_1 \cup J_{k_2}$, im Falle $J_{k_2} \subset L_1$ oder $L_1 \subset J_{k_2}$ trivialerweise, andernfalls durch das Hilfslemma. Dann ist entweder $I \subset L_2$ oder es existiert $k_3 \neq k_2, 1$ etc., und nach endlich vielen Schritten erhalten wir eine Trivialisierung auf einer Umgebung von K .

· Ist dann schliesslich $K_1 \subset J_1 \subset K_2 \subset \dots, \cup_{k=1}^{\infty} K_k = I$, eine Ausschöpfung von I durch kompakte Intervalle mit Trivialisierungen auf den offenen J_k (s. 1.4), so erhalten wir durch Anwenden des Hilfslemmas auf J_k und die beiden Komponenten von $J_{k+1} \setminus K_k$ eine Fortsetzung der Trivialisierung auf einer Umgebung von K_k auf J_{k+1} . Da wir an jeder festen Stelle nach endlich vielen Schritten die Trivialisierung nicht mehr ändern, erhalten wir für $k \rightarrow \infty$ eine Trivialisierung auf ganz I . \square

Dies ist zugegebenermassen nicht der eleganteste Beweis der Aussage, beleuchtet aber schön den Zusammenhang zwischen Trivialisierungen von Vektorbündeln und dem Lösen von Differentialgleichungen: Die Trivialisierungswchselfunktion $\tau : I \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ zu jeder anderen globalen Trivialisierung $\tilde{\Phi}$ auf ganz I erfüllt eine

Differentialgleichung $\dot{\tau} = -A\tau$ mit $A : I \rightarrow \text{Mat}(r, \mathbb{R})$, und jede solche Differentialgleichung bestimmt eine Trivialisierung von E . (Hierbei kann der Anfangswert der Differentialgleichung als Datum einer Basis der Trivialisierung, d.h. eines globalen Rahmens, aufgefasst werden.)

Paralleltransport auf Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums

Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m \ni (y^r)_{r=1,\dots,m}$, welchen wir jetzt mit dem euklidischen Standardprodukt

$$\langle y_1, y_2 \rangle := \sum_{r=1}^m y_1^r y_2^r \quad \left(\frac{13}{2}.5\right)$$

ausr\u00fcsten. Bez\u00fcglich einer lokalen Parametrisierung $y(x) = (y^r(x))_{r=1,\dots,m}$, $x = (x^i)_{i=1,\dots,n} \in U \subset \mathbb{R}^n$ wird der Tangentialraum von M in $y(x)$ aufgespannt durch die n Vektoren $t_i = (t_i^r)_{r=1,\dots,m}$ ($i = 1, \dots, n$) mit

$$t_i^r(x) := \frac{\partial y^r}{\partial x^i}(x), \quad T_{y(x)}M = \text{span}_{\mathbb{R}}\{t_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^m \quad \left(\frac{13}{2}.6\right)$$

Aha: Ist M lokal Niveaumenge einer regul\u00e4ren Funktion $F = (F^a)_{a=1,\dots,k}$ mit Werten in \mathbb{R}^k ($k = m - n$), so wird das orthogonale Komplement von $T_{y(x)}M$ aufgespannt von den k Vektoren $n_a = (n_a^r)_{r=1,\dots,m}$ ($a = 1, \dots, k$) mit

$$n_a^r := \frac{\partial F^a}{\partial y^r} \quad T_{y(x)}M^\perp = \text{span}_{\mathbb{R}}\{n_a \mid a = 1, \dots, k\} \subset \mathbb{R}^m \quad \left(\frac{13}{2}.7\right)$$

(Die Inkonsistenz in der Indexposition ist eine Folge von $(\frac{13}{2}.5)$, in der Tat ist

$$\langle n_a, t_i \rangle = \sum_r \frac{\partial F^a}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial y^r}{\partial x^i} = \frac{\partial F^a}{\partial x^i} = 0, \quad \forall i, a \quad \left(\frac{13}{2}.8\right)$$

nach dem Satz \u00fcber implizite Funktionen.) Seit der Antike ist ausserdem bekannt:

- Eine differenzierbare Kurve in M faktorisiert lokal \u00fcber die Parametrisierung, d.h. wir k\u00f6nnen eine solche Kurve lokal schreiben als $s \mapsto y(\gamma(s))$ mit einer differenzierbaren Abbildung $\gamma : I \rightarrow U$. Ihr Tangentialvektor an der Stelle s ist

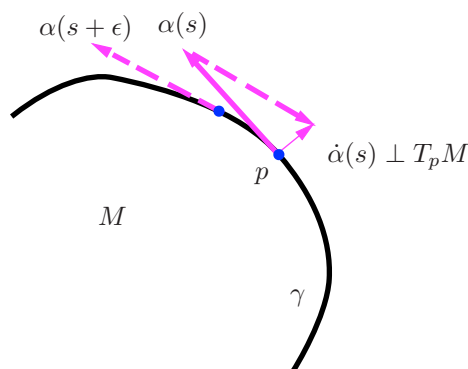
$$\frac{d}{ds}y(\gamma(s)) = t_i(\gamma(s))\dot{\gamma}^i(s) \quad \left(\frac{13}{2}.9\right)$$

- Ebenso l\u00e4sst sich ein allgemeines Tangentialvektorfeld entlang γ , d.h. eine differenzierbare Abbildung $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\alpha(s) \in T_{y(\gamma(s))}M \forall s$ in die Basis $(\frac{13}{2}.6)$ entwickeln, d.h.

$$\alpha(s) = t_i(\gamma(s))\alpha^i(s) \in \mathbb{R}^m \quad \left(\frac{13}{2}.10\right)$$

mit differenzierbaren Funktion $\alpha^i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition $\frac{13}{2}$.2. Wir sagen: α variiert parallel zu M entlang γ , wenn seine Ableitung (als \mathbb{R}^m -wertige Funktion!) orthogonal zu M ist.



Wegen ($\frac{13}{2}$.8) variiert α also genau dann parallel zu M , wenn $\forall j = 1, \dots, n, \forall s$:

$$\left\langle \frac{d\alpha(s)}{ds}, t_j(\gamma(s)) \right\rangle = 0 \quad (\frac{13}{2}.11)$$

oder ausgerechnet mit ($\frac{13}{2}$.6)

$$\sum_{r=1}^m \frac{d}{ds} \left(\alpha^i(s) \frac{\partial y^r}{\partial x^i}(\gamma(s)) \right) \frac{\partial y^r}{\partial x^j}(\gamma(s)) = \sum_{r=1}^m \dot{\alpha}^i \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} + \alpha^i \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \dot{\gamma}^k = 0 \quad (\frac{13}{2}.12)$$

· Das Bemerkenswerte an ($\frac{13}{2}$.12) ist, dass sie tatsächlich *nicht von den "Details" der Einbettung von M abhängt, sondern sich vollständig durch die "erste" Fundamentalform (Gramsche Matrix)*

$$g_{ij} := \sum_{r=1}^m t_i^r t_j^r = \sum_{r=1}^m \frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \quad (\frac{13}{2}.13)$$

ausdrücken lässt. Es gilt nämlich:

$$\frac{\partial^2 y^r}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^k} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial y^r}{\partial x^i} \frac{\partial y^r}{\partial x^k} \right) \right] \quad (\frac{13}{2}.14)$$

(Nachrechnen!) Da ausserdem die Matrix ($\frac{13}{2}$.13) nicht entartet ist, lässt sich mit ihrer punktweise Inversen g^{ij} (d.h. $g^{ij} g_{jk}(x) = \delta_k^i \forall x$) die Gleichung ($\frac{13}{2}$.12) der Parallelität entlang γ schreiben als

$$\dot{\alpha}^i + \Gamma_{kl}^i \dot{\gamma}^k \alpha^l = 0 \quad (\frac{13}{2}.15)$$

mit den *Christoffel-Symbolen*

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_k g_{jl} + \partial_l g_{jk} - \partial_j g_{kl}) \quad (\frac{13}{2}.16)$$

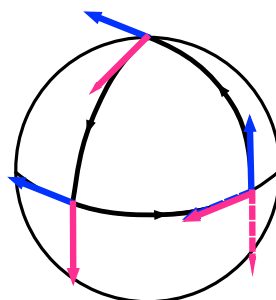
Beachte die Symmetrie: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

· Für ein kompaktes Teilintervall $[a, b] \subset I$ und Anfangswerte $(\alpha^i(a))$ definiert die ausgewertete Lösung $(\alpha^i(b))$ der gewöhnlichen Differentialgleichung ($\frac{13}{2}$.12) bzw. ($\frac{13}{2}$.15) den *Paralleltransport* von $\alpha^i(a) t_i \in T_p M$ vom Punkt $p = y(\gamma(a)) \in M$ entlang γ zum Punkt $q = y(\gamma(b))$, und aus den allgemeinen Sätzen über lineare Differentialgleichungen folgt: Die Zuordnung

$$P_{qp}^{(\gamma)} : T_p M \ni \alpha(a) \mapsto \alpha(b) \in T_q M \quad (\frac{13}{2}.17)$$

ist linear und invertierbar.

· Der Paralleltransport zwischen festen Endpunkten ist i.A. aber stark von der Kurve abhängig, wie man am Besten in einem Beispiel sieht.



· Fixieren wir umgekehrt $0 \in I$, $p := y(\gamma(0))$, so erfüllen die Komponenten $P(s)_i^j$ der Transportabbildung ($\frac{13}{2}$.17) bezüglich der Tangentialraumbasen t_i , d.h. für $\alpha = \alpha^i t_i \in T_p M$ ist

$$(P_{y(\gamma(s))p}^{(\gamma)})^i = P(s)_j^i \alpha^j, \quad (\frac{13}{2}.18)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{ds} P(s)_j^i = -\Gamma_{kl}^i \dot{\gamma}^k P(s)_j^l \quad (\frac{13}{2}.19)$$

· Ist, nochmal umgekehrt, $\alpha(s) \in T_{y(\gamma(s))} M$ ein (nicht notwendig parallel variierendes) Tangentialvektorfeld entlang γ , und benutzen wir $P(s)^{-1}$ zur Identifikation von $T_{y(\gamma(s))} M$ mit $T_p M$, so erhalten wir die *kovariante Ableitung* von α als den Vektor

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)} \alpha = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 (P(s)^{-1} \alpha(s)) \in T_p M \quad (\frac{13}{2}.20)$$

mit Komponenten

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(0)} \alpha)^i = \dot{\alpha}^i(0) + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j(0) \alpha^k(0) \quad (\frac{13}{2}.21)$$

(Beachte: $P(0) = \text{id}$ und daher $\dot{P}^{-1}(0) = -\dot{P}(0)$.) Die kovariante Ableitung hängt nur noch $\dot{\gamma}(0)$ ab (und nicht dem Rest der Kurve).

· Es ist auch

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)} \alpha = \Pi_{T_p M} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_0 \alpha(s) \right) \quad (\frac{13}{2}.22)$$

wobei $\Pi_{T_p M} : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ die *orthogonale Projektion* auf $T_p M$ ist. (Dies folgt aus der Tatsache, dass $\forall l = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \alpha - \dot{\alpha}(0), t_l \rangle &= \sum_{r=1}^m \left(\Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j(0) \alpha^k(0) t_i^r - \alpha^i(0) \frac{\partial t_i^r}{\partial x^j} \dot{\gamma}^j(0) \right) t_l^r \\ &= \sum_{r=1}^m \left(\Gamma_{jk}^i t_i^r t_l^r - \frac{\partial^2 y^r}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial y^r}{\partial x^l} \right) \dot{\gamma}^j(0) \alpha^k(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\frac{13}{2}.23)$$

gemäss der Definition ($\frac{13}{2}$.16) der Christoffel-Symbole.

Wir kommen nun zur Abstraktion.

§ 7 Der metrische Tensor

Definition 7.1. · Eine Riemannsche Metrik (man sagt auch: metrischer Tensor) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein punktweise positiv definites symmetrisches Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$, d.h. $\forall p \in M$ ist

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \tag{7.1}$$

eine positiv definite symmetrische Bilinearform, und $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $g(X, Y) \in \mathcal{F}(M)$.

· Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g .

· Noch äquivalent dazu sind die Komponententen bezüglich einer jeden Koordinatenbasis, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, d.h. $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ auf U , differenzierbar und bilden an jedem Punkt $p \in U$ eine positiv definite symmetrische Matrix.

· Man schreibt und rechnet wegen der Symmetrie hier bequem mit unterdrücktem \otimes , z.B. ist für $(g_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = 2((dx^1)^2 + dx^1 dx^2 + (dx^2)^2)$.

· Eine pseudo-Riemannsche Metrik ist ein symmetrisches Tensorfeld welches an jedem Punkt eine nicht-entartete Bilinearform von konstantem Index/konstanter Signatur definiert.⁸ Die meisten (aber nicht alle) der folgenden algebraischen Betrachtungen hängen nur von der Nicht-entartetheit ab. Wenn wir daran denken, weisen wir auf die Unterschiede hin.

Beispiel 7.2. · \mathbb{R}^m mit dem euklidischen Standardprodukt als nicht-entartete symmetrische Bilinearform $\eta : T\mathbb{R}^m \times T\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

· Jede Untermannigfaltigkeit $i : L \rightarrow M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit erbt durch Rückzug (bzw. Einschränkung) $i^*(g) = g|_{T_p L \times T_p L}$ eine Riemannsche Metrik von M . (Dies gilt z.B. nicht im pseudo-Riemannschen Fall.) (Eine Immersion ist ausreichend.)

· Insbesondere Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

· Sind (M_1, g_1) und (M_2, g_2) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i, i = 1, 2$ die Projektionen auf die beiden Faktoren, so ist $\pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ eine Riemannsche Metrik auf $M_1 \times M_2$.

· Eine differenzierbare Abbildung $F : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten heisst Isometrie, falls F ein Diffeomorphismus ist und $F^*(g_2) = g_1$. Dies ist definitionsgemäss genau dann der Fall, wenn $\forall p \in M, v, w \in T_p M$ $g_{1p}(v, w) = g_{2F(p)}(DF_p v, DF_p w)$.

⁸Zur Erinnerung: Ist $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, so ist

$$\text{Index}(B) := \max\{\dim W \mid B|_W \text{ negativ definit}\} = \#(\text{negative Eigenwerte}) \tag{7.2}$$

(Sylvester Trägheit) Die Signatur von B ist die (häufig auch ungeordnete) Liste

$$\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\dim \text{Ker}(B)}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\text{Index}(B)}, +1, \dots, +1 \right) \tag{7.3}$$

der Diagonaleinträge in einer Standardbasis für B .

§ 7. DER METRISCHE TENSOR

- Die Einbettungssätze von Nash garantieren, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit isometrisch zu einer Untermannigfaltigkeit eines geeigneten \mathbb{R}^m ist.
- Man beachte, dass aus dem letzten Punkt *nicht* folgt, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit lokal isometrisch zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n mit dem Standardprodukt ist. Insbesondere gehen auch nicht alle Riemannsche Metriken auf \mathbb{R}^n durch Diffeomorphismen auseinander hervor.

Proposition 7.3. *Jede Mannigfaltigkeit lässt eine Riemannsche Metrik zu.*

Beweis. Es sei $\{(U_i, \varphi_i)\}$ eine abzählbare Überdeckung von M mit Koordinatenumgebungen, s. 1.5, und (f_i) eine untergeordnete Teilung der Eins, d.h. $\forall i : f_i \geq 0$ und $\text{supp}(f_i) \subset U_i$, $\forall p: f_i(p) \neq 0$ nur für endlich viele i und $\sum_i f_i(p) = 1$, s. 2.4.

· Sei $g_i = f_i \bar{g}_i \in \Gamma(T^{(0,2)}M)$ die Fortsetzung von $\bar{g}_i \varphi_i^*(\eta)$ durch Null ausserhalb von $\text{supp}(f_i) \subset U_i$. Dann ist jedes g_i symmetrisch und positiv semi-definit. Für jedes $p \in M$ sind nur endlich viele g_i nicht null, und mindestens ein g_i positiv definit. Daher ist $g = \sum_i g_i$ wohldefiniert, symmetrisch und positiv definit. \square

(Beachte: $\sum f_i = 1$ wurde gar nicht benutzt.)

Definition 7.4. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. An jedem Punkt $p \in M$ definiert die Metrik g_p einen linearen Isomorphismus

$$\cdot^b : T_p M \rightarrow T_p M^\vee, \quad v^b(w) := g_p(v, w) \quad (7.4)$$

Wir schreiben seine Umkehrung als $\cdot^\sharp : T_p M^\vee \rightarrow T_p M$, eindeutig bestimmt durch $g(\lambda^\sharp, v) = \lambda(v)$.

· \cdot^b mit \cdot^\sharp setzt sich zu einem Isomorphismus von Vektorbündeln $TM \rightarrow TM^\vee$ über M , einem Isomorphismus von $\mathcal{F}(M)$ -Moduln $\mathfrak{X}(M)$ und $\Omega(M)$ sowie einer Reihe von Isomorphismen zwischen Tensorfeldern verschiedenen Typs fort. Bei dieser *metrischen Typänderung* ist allerdings auf die Reihenfolge der Argumente zu achten. Beispiel: $A \in \Gamma(T^{(1,2)}M)$,

$$\begin{aligned} A^{\sharp 1}(\omega_1, \omega_2, X_2) &= A(\omega_1, \omega_2^\sharp, X_2) \\ A^{\sharp 2}(\omega_1, \omega_2, X_2) &= A(\omega_2, X_2, \omega_1^\sharp) \end{aligned} \quad (7.5)$$

(Man braucht sich das nicht zu merken, (7.7) ist viel einfacher...)

- In Verbindung mit den Verjüngungsoperationen aus 6.11 erhält man den Begriff der metrischen Kontraktion, etwa $C_{ij} = C_j^1 \circ \cdot^{\sharp i} = C_{ji}$.
- Bezüglich Koordinatenbasen werden die Isomorphismen durch *Hoch- und Runterziehen von Indizes* gestiftet, d.h.

$$(X^b)_i = g_{ij} X^j, \quad (\omega^\sharp)^j = g^{ji} \omega_j \quad (7.6)$$

wo (g^{ij}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix ist, im Falle von (7.5) z.B.

$$(A^{\sharp 1})_j^{i_1 i_2} = g^{i_2 j_1} A_{j_1 j_2}^{i_1}, \quad (A^{\sharp 2})_j^{i_1 i_2} = g^{i_1 j_2} A_{j_1 j_2}^{i_2} \quad (7.7)$$

und die metrische Kontraktion durch

$$(C_{12}A)^j = g^{j_1 j_2} A_{j_1 j_2}^i \quad (7.8)$$

· Interessant:

$$C_{12}g = g^{ij}g_{ij} = \sum_{i=1}^n \delta_i^i = n = \dim(M) \quad (7.9)$$

· Der Isomorphismus rüstet auch jedes T_pM^\vee mit einer euklidischen Metrik aus, das zugehörige Tensorfeld von Typ $(2,0)$ wird oft missbräuchlich geschrieben als $g(\omega, \alpha) = g(\omega^\sharp, \alpha^\sharp)$, und ist in Koordinaten durch g^{ij} gegeben.

Korollar 7.5. *Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind TM und TM^\vee isomorph als Vektorbündel über M , insbesondere diffeomorph als Mannigfaltigkeiten.*

Beweis. Folgt aus 7.3 und 7.4. Der Isomorphismus ist natürlich nicht kanonisch. \square

Levi-Civita Zusammenhang

Definition 7.6. Es sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang r . Ein Zusammenhang auf E ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\ (X, \sigma) &\mapsto \nabla_X \sigma \end{aligned} \quad (7.10)$$

mit den Eigenschaften, dass $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E), f, g \in \mathcal{F}(M)$

(i) $\nabla_X(\sigma_1 + g\sigma_2) = \nabla_X\sigma_1 + g\nabla_X\sigma_2 + X(g)\sigma_2$

(ii) $\nabla_{X_1+fX_2}(\sigma) = \nabla_{X_1}\sigma + f\nabla_{X_2}\sigma$.

D.h., ∇ ist \mathbb{R} -linear, tensoriell in X , und derivativ in σ . Man nennt $\nabla_X\sigma$ auch die kovariante Ableitung von σ nach X .

Wir halten zunächst die Lokalitätseigenschaften von Zusammenhängen fest.

Lemma 7.7. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$, und $p \in M$.*

(i) *Sind $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ mit $\sigma_1(q) = \sigma_2(q) \forall q \in U$ Umgebung von p , dann gilt $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$(\nabla_X\sigma_1)(p) = (\nabla_X\sigma_2)(p) \quad (7.11)$$

(ii) *Sind $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_{1p} = X_{2p}$, dann gilt $\forall \sigma \in \Gamma(E)$*

$$(\nabla_{X_1}\sigma)(p) = (\nabla_{X_2}\sigma)(p) \quad (7.12)$$

Beweis. (i) Sei $f \in \mathcal{F}(M)$ mit $f = 1$ in einer Umgebung von p , und $f = 0$ auf $M \setminus U$. Dann gilt $X(f)(p) = 0$ und $f \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = 0$ auf ganz M . Aus der \mathbb{R} -Linearität folgt $\nabla_X(f(\sigma_1 - \sigma_2)) = 0$ und daher wegen 7.6 (i):

$$0 = \nabla_X(f(\sigma_1 - \sigma_2)) = f(\nabla_X(\sigma_1) - \nabla_X(\sigma_2)) + X(f)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (7.13)$$

Durch Auswerten bei p folgt $0 = \nabla_X(\sigma_1)(p) - \nabla_X(\sigma_2)(p)$.

§ 7. DER METRISCHE TENSOR

Einschub: Ebenso zeigt man, dass falls $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X = \tilde{X}$ in einer Umgebung von p , $\nabla_{\tilde{X}}\sigma = \nabla_X\sigma \ \forall \sigma \in \Gamma(E)$. Daraus folgt insbesondere, dass der Zusammenhang sich in eindeutiger Weise auf lokale Schnitte von TM und E zurückziehen lässt. (D.h. $\forall U \exists_1$ Zusammenhang $\nabla^{(U)} : \mathfrak{X}(U) \times \Gamma_U(E) \rightarrow \Gamma_U(E)$ s.d. $\nabla_X\sigma|_U = \nabla_{X|_U}^{(U)}(\sigma|_U) \ \forall X \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \Gamma(E)$. Wir schreiben dafür weiter ∇ .)

(ii) Ist speziell U eine Koordinatenumgebung von p , dann folgt für die Koeffizientenfunktionen X_1^i, X_2^i , d.h. $X_1 = X_1^i \partial_i, X_2 = X_2^i \partial_i$ auf U aus $X_{1p} = X_{2p}$, dass $X_1^i(p) = X_2^i(p) \ \forall i$, und daher aus der $\mathcal{F}(M)$ -Linearität

$$(\nabla_{X_1}\sigma)(p) - (\nabla_{X_2}\sigma)(p) = (\nabla_{X_1-X_2}\sigma)(p) = (X_1^i(p) - X_2^i(p))(\nabla_{\partial_i}\sigma)(p) = 0 \quad (7.14)$$

□

Als nächstes geben wir einige Formeln für das Rechnen in Koordinaten.

Lemma/Definition 7.8. *Es sei $(\sigma_a)_{a=1,\dots,r}$ ein lokaler Rahmen von E über einer offenen Menge $U \subset M$. Dann ist mit $\text{span}_{\mathbb{R}}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \cong \mathbb{R}^r$ per Definition eines Rahmens $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^r$ und $\Gamma_U(E) = \text{span}_{\mathcal{F}(M)}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \supset \mathbb{R}^r$. Für $X \in \mathfrak{X}(U)$ wird für jedes $p \in U$ durch*

$$(A_X)_p : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad (A_X)_p(x) := (\nabla_X(x))(p) \quad (7.15)$$

(die Trivialisierung ist unterdrückt) eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $(A_X)_p \in \text{End}(\mathbb{R}^r) \cong \text{Mat}(r, \mathbb{R})$ definiert. $p \mapsto (A_X)_p$ ist ein Schnitt von $U \times \text{End}(\mathbb{R}^r)$, die Abbildung

$$\mathfrak{X}(U) \ni X \mapsto A_X \in \Gamma(U \times \text{End}(\mathbb{R}^r)) \quad (7.16)$$

heißt Zusammenhangs(eins)form bezüglich der gegebenen Trivialisierung. Sie wird üblicherweise als Matrix-wertige lokale Einsform A_a^b aufgefasst, welche durch

$$\nabla_X(\sigma_a) = (A_X)_a^b \sigma_b \quad (7.17)$$

eindeutig bestimmt ist.

· Ist U eine Koordinatenumgebung, so heißen die lokalen Funktionen $A_{ia}^b = (A_{\partial_i})_a^b$ Zusammenhangskoeffizienten.

Vorsicht: A_{ia}^b sind nicht Koeffizienten eines Tensors.

· Für einen beliebigen lokalen Schnitt $\sigma = f^a \sigma_a \in \Gamma_U(E)$ gilt dann

$$\nabla_X(\sigma) = X(f^a)\sigma_a + f^a A_X(\sigma_a) \quad (7.18)$$

was man auch als $\nabla = d + A$ schreibt.

· Ist $(\rho_b)_{b=1,\dots,r}$ ein anderer lokaler Rahmen über einer Koordinatenumgebung V , mit Trivialisierungswechselfunktion $\tau : U \cap V \rightarrow GL(r, \mathbb{R}), \rho_b = \tau_b^a \sigma_a$ so hängen die zugehörigen Zusammenhangskoeffizienten B_{ja}^b auf $U \cap V$ via

$$B_{jb_1}^{b_2} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\partial_i \tau_{b_1}^{a_1} (\tau^{-1})_{a_1}^{b_2} + \tau_{b_1}^{a_1} A_{ia_1}^{a_2} (\tau^{-1})_{a_2}^{b_2} \right) \quad (7.19)$$

mit denen zu U und σ zusammen.

Beweis. Nachrechnen. Beispielsweise folgt (7.19) direkt aus

$$\begin{aligned} B_{jb_1}^{b_2} \tau_{b_2}^{a_2} \sigma_{a_2} &= B_{jb_1}^{b_2} \rho_{b_2} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \rho_{b_1} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (\tau_{b_1}^{a_1} \sigma_{a_1}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \left(\frac{\partial \tau_{b_1}^{a_2}}{\partial x^i} \sigma_{a_2} + \tau_{b_1}^{a_1} A_{ia_1}^{a_2} \sigma_{a_2} \right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

durch Koeffizientenvergleich auf $U \cap V$. \square

Für die Definition und Untersuchung von Paralleltransport, Geodäten, und Variationen ist die folgende natürliche Verträglichkeit mit Morphismen nützlich.

Lemma 7.9. *Es sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ , und $F : L \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Dann existiert genau ein Zusammenhang $F^*\nabla$ auf $F^*(E)$ so dass $\forall X \in \mathfrak{X}(L)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $\forall p \in L$*

$$((F^*\nabla)_X(F^*\sigma))(p) = F^*(\nabla_Y(\sigma))(p) \quad (7.21)$$

für ein jedes beliebige Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $Y_{F(p)} = DF_p(X_p)$. $F^*\nabla$ heisst der Pullback von ∇ .

Beweis. Beachte: Wegen 7.7 (ii) hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von Y ab. Gemäss Übungsaufgabe wird $\Gamma(F^*E)$ lokal von $F^*(\Gamma(E))$ erzeugt. Der Inhalt der Aussage ist daher, dass wir den durch (7.21) auf $F^*(\Gamma(E))$ definierten Zusammenhang in eindeutiger Weise auf ganz $\Gamma(F^*E)$ fortsetzen können.

· Wir schreiben den Beweis im Fall $\dim L = 1$ aus, d.h. $F = \gamma : I \rightarrow M$ ist eine differenzierbare Kurve. Ist $t \in I$ und $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ein lokaler Rahmen von E in einer Umgebung von $\gamma(t)$, so ist (per Definition des Pullbacks) $(\gamma^*(\sigma_1), \dots, \gamma^*(\sigma_r))$ ein lokaler Rahmen von $\gamma^*(E)$ in einer Umgebung von t .

· Unter der Annahme, dass $\gamma^*(\nabla)$ existiert, schreiben wir ∇_{∂_t} für $(\gamma^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}}$ und rechnen für einen lokalen Schnitt $\sigma = f^a \gamma^*(\sigma_a)$ von $\gamma^*(E)$:

$$\nabla_{\partial_t}(\sigma)(t) = f^a(t) \gamma^*(\sigma_a)(t) + f^a(t) \underbrace{\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\sigma_a)}_{\in E_{\gamma(p)} = (F^*E)_t} \quad (7.22)$$

wobei wir ausnutzen, dass der zweite Term auf der rechten Seite nicht davon abhängt, wie wir $\dot{\gamma}(t)$ zu einem lokalen Vektorfeld auf M fortsetzen.

· Die Formel (7.22) legt ∇_{∂_t} vollständig fest, und ist als Definition benutzt klarerweise $\mathcal{F}(I)$ -linear in ∂_t und derivativ in σ . Die Wohldefiniertheit (d.h. die Unabhängigkeit von der Trivialisierung) folgt aus der Tatsache, dass für $f \in \mathcal{F}(M)$ (im vorliegenden Fall, die Trivialisierungsfunktionen $\tau : U \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$) per Definition $\frac{d}{dt}(\gamma^*(f)) = \dot{\gamma}(t)(f)$. \square

Sind $(\sigma_a)_{a=1, \dots, r}$ ein lokaler Rahmen von E über einer Kartenumgebung U von M und A_{ia}^b die zugehörigen Zusammenhangskoeffizienten, so sind die Zusammenhangskoeffizienten von $F^*\nabla$ bezüglich dem Rahmen $(F^*(\sigma_a))_{a=1, \dots, r}$ über $F^{-1}(U)$ (vgl. 6.7) auf einer Kartenumgebung $V \subset F^{-1}(U)$ einfach gegeben durch $\frac{\partial F^i}{\partial u^j} A_{ia}^b$, fertig.

§ 7. DER METRISCHE TENSOR

Definition 7.10. Es sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ , und $\gamma : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve.

· Ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(\gamma^*E)$ heisst parallel (auch kovariant konstant oder horizontal) entlang γ , falls $\forall t \in I$:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \sigma(t) = 0 \quad (7.23)$$

Lemma 7.11. · Für gegebenes $a \in I$ und $x \in E_{\gamma(a)}$ existiert genau ein paralleler Schnitt $\sigma \in \Gamma(\gamma^*E)$ mit $\sigma(a) = x$.

· Für jedes weitere $b \in I$ ist dann die Zuordnung

$$E_{\gamma(a)} \ni x \mapsto \sigma(b) \in E_{\gamma(b)} \quad (7.24)$$

ein linearer Isomorphismus, genannt Paralleltransport von x entlang γ .

Beweis. Durch Auswerten von (7.22) mittels 7.8 wird aus (7.23) bezüglich lokalen Trivialisierungen (auf M) die explizite (vektorwertige) gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{f}^a + A_{ib}^a \dot{\gamma}^i f^b = 0 \quad (7.25)$$

deren Lösungen man unter Trivialisierungswechseln geeignet verheftet auf ganz I fortsetzen kann. Alternativ beruft man sich erst auf Lemma $\frac{13}{2}.1$, um $\gamma^*(E)$ global zu trivialisieren, und löst dann nur noch eine Differentialgleichung auf ganz I . $x \mapsto \sigma(b)$ ist ein linearer Isomorphismus wie in ($\frac{13}{2}.17$). \square

Proposition 7.12. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M mit Zusammenhang ∇ , $p \in M$, und $v \in T_pM$. Schreiben wir für eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ $P(t) : E_p \rightarrow E_{\gamma(t)}$ für den Paralleltransportoperator gemäss 7.11 ($a = 0$, $b = t$), so gilt für jede solche Kurve mit $\dot{\gamma}(0) = v$ und jeden Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P(t)^{-1}(\sigma(\gamma(t))) = \nabla_v \sigma \in E_p \quad (7.26)$$

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Das Tangentialbündel ist speziell:

Definition 7.13. Ein affiner (auch: linearer) Zusammenhang auf M ist ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel TM .

· Ein affiner Zusammenhang gibt insbesondere in $\mathcal{F}(M)$ -linearer Weise für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ einen Lift zu einer $\mathcal{F}(M)$ -Modul Derivation von $\mathfrak{X}(M)$ und setzt sich daher gemäss Prop. 6.13 in eindeutiger Weise auf die ganze Tensor-Algebra $\mathcal{T}(M)$ fort. Wir schreiben $\nabla : X \mapsto \nabla_X \in \text{Der}(\mathcal{T}(M))$ für diese Fortsetzung.

Damit kehren wir zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten zurück.

Definition 7.14. Ein affiner Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heisst metrisch, falls $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (7.27)$$

Lemma 7.15. (i) Ein affiner Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist genau dann metrisch, wenn $\nabla g = 0$.

(ii) Ein metrischer Zusammenhang kommutiert mit metrischer Typänderung und metrischer Kontraktion.

(iii) Paralleltransport mit einem metrischen Zusammenhang definiert eine lineare Isometrie von Tangentialräumen entlang von Kurven.

Beweis. (i) Es ist $\nabla g = 0 \Leftrightarrow (\nabla_X g)(Y, Z) = 0 \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Da ∇_X eine Tensorableitung ist, gilt (s. Übungsaufgabe)

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \quad (7.28)$$

und daraus sofort die Behauptung.

(ii) Es genügt zu zeigen, dass $(\nabla_X Y)^b = \nabla_X(Y^b)$, der Rest folgt dann aus den algebraischen Definitionen. Für $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ist

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)^b(Z) &= g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= X(Y^b(Z)) - Y^b(\nabla_X Z) = (\nabla_X(Y^b))(Z) \end{aligned} \quad (7.29)$$

(iii) Mit Hilfe von (7.27) und der Definition 7.9 folgt für $p \in M, v, w \in T_p M$

$$\frac{d}{dt}g(P(t)v, P(t)w) = g(\nabla_{\partial_t}(P(t)v), P(t)w) + g(P(t)v, \nabla_{\partial_t}(P(t)w)) = 0 \quad (7.30)$$

□

Lemma/Definition 7.16. Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf M . Dann ist die \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (7.31)$$

anti-symmetrisch und $\mathcal{F}(M)$ -bilinear. Diese Abbildung, bzw. das gemäß 6.10 zugehörige Tensorfeld vom Typ $(1, 2)$ heisst die Torsion von ∇ .

• Ein affiner Zusammenhang heisst torsionsfrei, falls $T = 0$.

Beweis. Die Anti-Symmetrie ist klar aus der Definition, es genügt also die $\mathcal{F}(M)$ -Linearität in einem Argument zu prüfen.

• Für $f \in \mathcal{F}(M)$ folgt aus der derivativen Eigenschaft von ∇ und der Lie-Ableitung:

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f \cdot \nabla_X Y - f \cdot \nabla_Y X - Y(f) \cdot X - f \cdot [X, Y] + Y(f) \cdot X \\ &= f \cdot T(X, Y) \end{aligned} \quad (7.32)$$

d.h., $\mathcal{F}(M)$ -Linearität. □

Interpretation der Torsion wird nachgereicht!

Proposition 7.17. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert genau ein torsionsfreier metrischer affiner Zusammenhang auf M , genannt der Levi-Civita Zusammenhang.

§ 7. DER METRISCHE TENSOR

Beweis. Angenommen, es existiert ein solcher Zusammenhang. Dann gilt für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ unter Ausnutzung von Torsionsfreiheit und Metrizität:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Metrizität} & & \text{Torsionsfreiheit} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g(\nabla_X Y, Z) & = & Xg(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\
 -g(Y, \nabla_Z X) & = & -Zg(Y, X) + g(\nabla_Z Y, X) \\
 g(\nabla_Y Z, X) & = & Yg(Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) \\
 & & \parallel \\
 & & g(\nabla_X Y, Z)
 \end{array} \quad (7.33)$$

Durch Zusammenfassen folgt die Gültigkeit der *Koszulformel*

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\
 &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])]
 \end{aligned} \quad (7.34)$$

welche wegen der Nicht-Entartetheit von $g^9 \nabla_X Y$ (falls der Zusammenhang existiert) an jedem Punkt eindeutig bestimmt.

· Zur Nachweis der Existenz zeigen wir, dass die Formel (7.34) einen torsionsfreien metrischen Zusammenhang auf TM definiert.

· \mathbb{R} -Linearität: ist klar

· $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$: Für $\omega \in \Omega(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ ist mit $Z := \omega^\sharp$

$$\begin{aligned}
 \nabla_X Y(f\omega) &= g(\nabla_X Y, fZ) = f \cdot g(\nabla_X Y, Z) \\
 &+ \frac{1}{2} [X(f)g(Y, Z) + Y(f)g(X, Z) - Y(f)g(X, Z) - X(f)g(Y, Z)] \\
 &= f \cdot g(\nabla_X Y, Z) = f \cdot \nabla_X Y(\omega)
 \end{aligned} \quad (7.35)$$

$\nabla_X Y : \Omega(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ ist also $\mathcal{F}(M)$ -linear.

· Tensoriell in X : genauso \checkmark

· Derivativ in Y : Hier gilt ein anderes Vorzeichen, so dass

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X(fY), Z) &= f \cdot g(\nabla_X Y, Z) \\
 &+ \frac{1}{2} [X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) + Z(f)g(X, Y) + X(f)g(Z, Y)] \\
 &= f \cdot g(\nabla_X Y, Z) + X(f)g(Y, Z)
 \end{aligned} \quad (7.36)$$

$\Rightarrow \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

· Metrizität:

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) &= \\
 \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \\
 + Xg(Z, Y) + Zg(X, Y) - Yg(X, Z) - g(X, [Z, Y]) - g(Z, [X, Y]) + g(Y, [X, Z])] \\
 &= Xg(Y, Z)
 \end{aligned} \quad (7.37)$$

⁹Die Koszulformel gilt insbesondere auch im pseudo-Riemannschen Fall.

· Torsionsfreiheit:

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \\
 \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \\
 - Yg(X, Z) - Xg(Y, Z) + Zg(Y, X) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])] \\
 &= g(Z, [X, Y])
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

$$\Rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad \square$$

Bemerkungen. · Aus der Koszul-Formel lassen sich die Zusammenhangskoeffizienten des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich einem lokalen Koordinatenrahmen von TM explizit ausrechnen: Wie bereits vor 5.16 festgehalten, gilt für die Koordinatenvektorfelder

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0 \tag{7.39}$$

und daher folgt aus (7.34)

$$g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l) = \frac{1}{2} (\partial_i g(\partial_j, \partial_l) + \partial_j g(\partial_i, \partial_l) - \partial_l g(\partial_i, \partial_j)) \tag{7.40}$$

d.h. mit der Notation aus (7.6) für die Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{7.41}$$

Ein Vergleich mit ($\frac{13}{2}$.16) zeigt dann, dass der dort eingeführte Paralleltransport auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^m mit dem Paralleltransport mit dem zur induzierten Metrik gehörigen Levi-Civita-Zusammenhang zusammenfällt. Man beachte insbesondere wieder die Symmetrie

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{7.42}$$

· Die zu einem Koordinatenwechsel gehörigen Trivialisierungswechselfunktionen von TM sind (wir erinnern an (3.14))

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^i} \tag{7.43}$$

Aus (7.19) folgt daraus für die Christoffelsymbole (7.41) das Transformationsverhalten:

$$\tilde{\Gamma}_{\tilde{i}\tilde{j}}^{\tilde{k}} = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{k}}}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}}} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}} \cdot \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{k}}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^2 x^k}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}} \partial \tilde{x}^{\tilde{j}}} \tag{7.44}$$

· Eine häufig anzutreffende Notation: Sind $X^i = X(x^i)$ die Komponentenfunktionen eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich lokaler Koordinaten, und $X_{,j}^i := \partial_j X^i$ deren *gewöhnliche* Ableitungen, so sind die Komponenten

$$X_{,j}^i := (\nabla_{\partial_j} X)(x^i) \tag{7.45}$$

§ 8. GEODÄTEN

der *kovarianten* Ableitung gegeben durch

$$X_{;j}^i = X_{,j}^i + \Gamma_{jk}^i X^k \quad (7.46)$$

Dies setzt sich gemäss (6.39) auf Einsformen zu

$$\omega_{i;j} = \omega_{i,j} - \Gamma_{ij}^k \omega_k \quad (7.47)$$

fort, und auf Tensoren höherer Stufe zu

$$A_{j_1 \dots j_s; i}^{i_1 \dots i_r} = A_{j_1 \dots j_s, i}^{i_1 \dots i_r} + \Gamma_{ik}^{i_1} A_{j_1 \dots j_s}^{k i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma_{ik}^{i_r} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{r-1} k} - \Gamma_{ij_1}^k A_{k j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots \quad (7.48)$$

§ 8 Geodäten

Mit dem metrischen Tensor lassen sich

(i) *in jedem Tangentialraum* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit die aus der euklidischen Geometrie vertrauten Strukturen wiederfinden: Nebst Punkten machen dort auch Begriffe wie Geraden, Längen, Winkel, Parallelen, Flächen- und Volumeninhalte, Kugeln, etc. Sinn und stehen in den (höher-dimensionalen Verallgemeinerungen der) vertrauten Verhältnissen zueinander.

(ii) einige dieser Begriffe auf ausgedehnte Gebilde fortsetzen. So macht es sicherlich wenig Mühe, sich die Definition des Volumens einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M vorzustellen: Man wählt eine endliche Überdeckung $\{(U_i, \varphi_i)\}$ von M durch präkompakte Kartengebiete, eine untergeordnete Teilung der Eins (f_i) , setzt

$$\text{Vol}(M) = \int_M \sqrt{\det g} d^n x := \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\det((\varphi^{-1})^*(f_i g))} d^n x \quad (8.1)$$

und zeigt mit Hilfe der Transformationsformel für das Riemannsche Integral die Unabhängigkeit von den Wahlen. (Die Einschränkung der Metrik (s. 7.2) induziert dann einen Volumenbegriff auch für kompakte Untermannigfaltigkeiten.) (Beachte auch: Dieser Volumenbegriff macht auch für nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten Sinn.) (Wir können auch Integrale von reell- und komplexwertigen differenzierbaren Funktionen über M und ihre Untermannigfaltigkeiten berechnen.)

Diese geometrischen Massgrößen müssen sich im Allgemeinen aber nicht mehr wie im euklidischen Raum verhalten, und zwar dies obwohl die kovariante Ableitung (bzw. der Paralleltransport) es erlaubt, die euklidische Geometrie (infinitesimal) benachbarter Tangentialräume miteinander zu vergleichen. Die Untersuchung der (lokalen und globalen) Abweichungen von der euklidischen Geometrie im Tangentialraum ist zentraler Gegenstand der Riemannschen Geometrie. (Dass diese Trennung zwischen punktweise und lokalen Verhältnissen ein viel besseres Bild der physikalischen Messvorschriften gibt als die älteren Begriffe des absoluten Raumes und der absoluten Zeit, ist die zentrale Einsicht des sog. Äquivalenzprinzips der Allgemeinen Relativitätstheorie.) Wir beginnen in einer Dimension mit der Verallgemeinerung von Geraden zu Geodäten.

Wie auch schon zuvor verstehen wir unter einer Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit¹⁰ M stets eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow M, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ offenes oder kompaktes Intervall} \quad (8.2)$$

In einem anderen Sprachgebrauch versteht man unter einer Kurve das Bild einer solchen Abbildung. Die sagen zur Unterscheidung dann “parametrisierte Kurve” zu (8.2), wir zur Betonung “Spur der Kurve” zu $\gamma(I)$. Ist $I = [a, b]$, und sind $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ als fest gedacht, so sagen wir auch (parametrisierter) Weg (oder Pfad) von p nach q .

Definition 8.1. Ein Kurve heisst regulär, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \in T_{\gamma(t)}M \forall t \in I$. ($\Leftrightarrow \gamma$ ist eine Immersion.)

· Eine stückweise differenzierbare Kurve ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ s.d. gilt: $\forall t \in I \exists \epsilon > 0$ s.d. $\gamma|_{(t-\epsilon, t]}$ und $\gamma|_{[t, t+\epsilon)}$ differenzierbar sind. (Dies ist äquivalent zur Aussage, dass $\forall [a, b] \subset I$ endlich viele Stellen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ existieren s.d. γ auf jedem $[a_{i-1}, a_i]$ differenzierbar ist.)

· Eine Umparametrisierung einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ist für ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Bijektion $h : J \rightarrow I$ die Kurve $\gamma \circ h : J \rightarrow M$. Man kann orientierungstreue $h' > 0$ und orientierungsumkehrende $h' < 0$ Umparametrisierungen zulassen. Zur Behandlung der stückweise differenzierbaren Kurven lassen wir auch auch surjektive h mit Endpunkttreue zu. Eine Eigenschaft von Kurven heisst invariant unter Umparametrisierung, wenn sie für alle Umparametrisierungen einer jeden gegebenen Kurve die gleiche ist. (Beispiel: Die Spur einer Kurve, Anfangs- und Endpunkte bei Orientierungstreue.)

Definition 8.2. · Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ist die nicht-negative reelle Zahl

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (8.3)$$

· Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heisst nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t) = 1 \forall t \in I$. (Dies ist genau dann der Fall, wenn $\forall t \in [a, b]: L(\gamma|_{[a, t]}) = t - a$.)

· Gilt etwas schwächer $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t) = c$ für ein festes $c > 0$ so heisst γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

· Für eine stückweise differenzierbare Kurve definiert man die Bogenlänge durch eine endliche Summe über differenzierbare Stücke.

Lemma 8.3. (i) Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung.

(ii) Jede reguläre Kurve lässt sich auf Bogenlänge umparametrisieren.

Beweis. (i) folgt aus der Kettenregel

$$\gamma'(\tau) := \frac{d}{d\tau} \gamma(h(\tau)) = h'(\tau) \dot{\gamma}(h(\tau)) \quad (8.4)$$

¹⁰Es ist für die folgenden Untersuchungen natürlich, sich Mannigfaltigkeiten stets als zusammenhängend vorzustellen. Wir wiederholen diese Voraussetzung an angemessener Stelle. Zur Erinnerung: Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

§ 8. GEODÄTEN

und der gewöhnlichen Substitutionsregel

$$\int_I \dot{\eta}(t) dt = \int_J \dot{\eta}(h(\tau)) |h'(\tau)| dt \quad (8.5)$$

(ii) Es sei

$$\eta = \int \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \quad (8.6)$$

eine Stammfunktion von $\|\dot{\gamma}\|$ auf I . Wegen der Regularität von γ ist dann $\dot{\eta} = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} > 0 \forall t$, d.h. η ist streng monoton, daher ein Diffeomorphismus von I auf ein Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Mit $h = \eta^{-1} : J \rightarrow I$ gilt

$$\dot{\gamma}'(\tau) = h'(\tau) \dot{\gamma}(h(\tau)) = \dot{\eta}(t(\tau))^{-1} \dot{\gamma}(h(\tau)) \quad (8.7)$$

und daraus folgt $g(\dot{\gamma}', \dot{\gamma}')(\tau) = 1$ (sc. cm/Hausnummer). \square

Definition 8.4. Ein Tangentialvektorfeld entlang einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ist ein Schnitt $X \in \mathfrak{X}^{(\gamma)}(M) := \Gamma(\gamma^*(TM))$. Die kovariante Ableitung entlang von γ ist die Kontraktion von $\gamma^*(\nabla)$ (Pullback des Levi-Civita-Zusammenhangs) mit dem Standardvektorfeld auf I , wofür wir dann

$$\nabla_t := (\gamma^* \nabla) \frac{\partial}{\partial t} \quad (8.8)$$

schreiben (vgl. 7.9). Zur Erinnerung: In lokalen Koordinaten (von M um $\gamma(t)$) gilt

$$(\nabla_t X)^i = \dot{X}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j X^k \quad (8.9)$$

und $\forall X, Y \in \mathfrak{X}^{(\gamma)}(M)$ gilt

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g(\nabla_t X, Y) + g(X, \nabla_t Y) \quad (8.10)$$

Beispiel: Die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}$ einer differenzierbaren Kurve ist ein Tangentialvektorfeld entlang γ , ebenso ihre Beschleunigung, $\nabla_t \dot{\gamma}$.

In der euklidischen Geometrie sind Geraden durch eine konstante Geschwindigkeit bei Parametrisierung nach der Bogenlänge ausgezeichnet. Bei einer allgemeinen Parametrisierung ist die Beschleunigung punktweise parallel zur Geschwindigkeit.

Definition 8.5. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

· Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heisst Geodäte, falls

$$\nabla_t \dot{\gamma} = 0 \quad (8.11)$$

· Eine Kurve heisst Prägeodäte, falls eine differenzierbare Funktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, mit der

$$\nabla_t \dot{\gamma}(t) = \lambda(t) \dot{\gamma}(t) \quad \forall t \in I \quad (8.12)$$

In lokalen Koordinaten lautet die Gleichung (8.12)

$$\ddot{\gamma}^i(t) + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = \lambda(t) \dot{\gamma}^i \quad (8.13)$$

Den Koordinatenausdruck der Geodätengleichung (8.11) erhält man für $\lambda = 0$. Aus den Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) folgt dann (natürlich durch geeignetes Fortsetzen beim Kartenwechsel, ggbfs. mit Anrufen von (7.44), vgl. auch 5.10):

Proposition 8.6. · Für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Vektor $v \in T_p M$ existiert eine eindeutig maximal fortgesetzte Geodäte durch p in Richtung v , d.h. ein offenes Intervall $I_{(p,v)} \ni 0$ und eine Geodäte $\gamma_{(p,v)} : I_{(p,v)} \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$.

· Die Abbildung $(p, v, t) \mapsto \gamma_{(p,v)}(t)$ ist in offenen Mengen $U \times (-\epsilon, \epsilon) \subset TM \times \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$ (definiert und) differenzierbar. \square

Auch ohne Koordinaten sieht man:

Lemma 8.7. (i) Eine Geodäte ist entweder konstant (d.h. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \forall t_1, t_2 \in I$) oder proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

(ii) Die Umparametrisierung einer Geodäte ist eine Prägeodäte, und eine Geodäte genau dann, wenn die Umparametrisierung affin linear ist.

(iii) Umgekehrt ist jede Prägeodäte entweder konstant oder eine reguläre Kurve und ihre Umparametrisierung auf Bogenlänge eine Geodäte.

Beweis. (i) Ist eine Geodäte nicht konstant, so gilt $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = c > 0$ an mindestens einer Stelle, und dann folgt die Aussage sofort aus (8.10) und (8.11).

(ii) folgt aus

$$\nabla_\tau \gamma'(\tau) = \nabla_\tau (h'(\tau) \dot{\gamma}(h(\tau))) = \underbrace{\frac{h''(\tau)}{h'(\tau)}}_{=: \lambda(\tau)} \gamma' + (h'(\tau))^2 \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}}_{=0} \quad (8.14)$$

$h'' = 0 \Rightarrow h$ ist affin linear.

(iii) Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine Prägeodäte und $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$, so folgt aus der Eindeutigkeit der Lösungen von (8.13), dass γ konstant ist. Ist andernfalls $\gamma \circ h : J \rightarrow M$ die Umparametrisierung nach Bogenlänge gemäss 8.3, so gilt einerseits wieder

$$\nabla_\tau \gamma'(\tau) = \frac{h''(\tau)}{h'(\tau)} \gamma' + (h'(\tau))^2 \underbrace{\nabla_t \dot{\gamma}}_{=: \lambda \frac{\gamma'}{h'}} = \left(\frac{h''}{h'} + \lambda h' \right) \gamma' \quad (8.15)$$

und andererseits

$$\frac{d}{d\tau} g(\gamma', \gamma') = 2g(\nabla_\tau \gamma', \gamma') = 0 \quad (8.16)$$

Zusammen folgt wegen $g(\gamma', \gamma') = 1$:

$$\frac{h''(\tau)}{h'(\tau)} + \lambda(h(\tau))(h'(\tau)) = 0, \quad (8.17)$$

d.h. $\nabla_\tau \gamma' = 0$. \square

(Der Versuch, umgekehrt die Umparametrisierung $\eta = h^{-1}$ so zu bestimmen, dass $\nabla_\tau \gamma' = 0$, führt auf die zu (8.17) äquivalente Differentialgleichung

$$\frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)} = \lambda(t) \quad (8.18)$$

§ 8. GEODÄTEN

mit Lösung

$$\eta(t) = \int c \cdot \exp\left(\int \lambda(t) dt\right) dt \quad (8.19)$$

für eine Integrationskonstante c so, dass $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$.)

Ähnlich wie Geraden in der euklidischen Geometrie sind Geodäten ausgezeichnete Kurven, die Aufschluss über die globale Zusammensetzung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit geben. Ausserdem sind sie ein grundlegendes Beispiel für das Zusammenspiel von globalen geometrischen Grössen und infinitesimalem Transport. Die Intuition für die (noch zu präzisierenden) Charakterisierung von Geodäten als “längenminimierende Kurven” geben die vom physikalischen Standpunkt aus natürlichen Variationsprinzipien. Zur Brechung der Umparametrisierungsinvarianz:

Definition 8.8. Für eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ heisst die reelle Zahl

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \quad (8.20)$$

die Energie von γ .

Übungsaufgabe: $\cdot E$ ist nicht invariant unter Reparametrisierung.

\cdot Es gilt die Abschätzung

$$L(\gamma)^2 \leq 2(b-a)E(\gamma) \quad (8.21)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Proposition 8.9. (e) Sind $p, q \in M$ fest, so ist E als differenzierbare Funktion auf dem Raum aller parametrisierten Wege von p nach q genau dann kritisch, d.h. $dE_\gamma = 0$, wenn γ eine Geodäte ist.

(l) Sind $p, q \in M$ fest, so ist L als differenzierbare Funktion auf dem Raum aller parametrisierten regulären Wege von p nach q genau dann kritisch, wenn γ eine Prägeodäte ist.

Erläuterung: In dieser Aussage wird der Raum der Wege

$$\mathcal{W}_{p,q} := \{\gamma : [a, b] \rightarrow M \mid a < b \in \mathbb{R}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\} \quad (8.22)$$

mit festen Endpunkten im Sinne der Variationsrechnung als “unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeit” mit Tangentialraum

$$\mathfrak{X}_0^{(\gamma)}(M) := \{X \in \Gamma(\gamma^*(TM)) \mid X(a) = 0, X(b) = 0\} \subset \mathfrak{X}^{(\gamma)}M \quad (8.23)$$

aufgefasst (vgl. die Erzeugung von $\text{Diff}(M)$ durch $\mathfrak{X}(M)$ in 5.8). Dies heisst genauer:

Definition 8.10. Eine Variation einer Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ist mit $\delta > 0$ eine differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : (-\delta, \delta) \times I, \quad (s, t) \mapsto \beta(s, t) \\ \text{mit } \beta(0, t) = \gamma(t) \quad \forall t \in I \end{aligned} \quad (8.24)$$

Die Abbildungen $t \mapsto \beta(s, t)$ für festes $s \in (-\delta, \delta)$ heissen longitudinale, die $s \mapsto \beta(s, t)$ für festes $t \in I$ transversale Kurven.

· Das über die partielle Ableitung in die transversale Richtung,

$$t \mapsto \beta'(0, t) := \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \beta(s, t) \in T_{\gamma(t)}M \quad (8.25)$$

definierte Tangentialvektorfeld $\beta'(0, \cdot) \in \mathfrak{X}^{(\gamma)}(M)$ entlang γ heisst Variationsfeld der Variation.

· Eine Variation eines Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ von p nach q heisst eigentlich, wenn $\beta(s, a) = p$ und $\beta(s, b) = q$, d.h. $\beta(s, \cdot) \in \mathcal{W}_{p,q} \forall s \in (-\delta, \delta)$.

· Das Variationsfeld einer eigentlichen Variation von γ erfüllt $\beta'(0, a) = 0$, $\beta'(0, b) = 0$, d.h. $\beta'(0, \cdot) \in \mathfrak{X}_0^{(\gamma)}(M)$ aus (8.23).

· Eine reellwertige Funktion $F : \mathcal{W}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst differenzierbar in $\gamma \in \mathcal{W}_{p,q}$, wenn für alle eigentlichen Variationen von γ die Funktion $s \mapsto F(\beta(s, \cdot))$ in $s = 0$ differenzierbar ist, und kritisch, wenn deren Ableitung dort stets verschwindet.

Fasst man eine Variation als “Kurve von Kurven durch γ ” auf, so erkennt man in 8.10 eine Definition des Tangentialraums über Kurven im Sinne von (3.26). Wie auch schon dort gibt es zu jedem Variationsfeld viele mögliche Variationen, d.h. die Abbildung: Kurven \rightarrow Tangentialvektoren ist nicht injektiv. (Insbesondere gewinnt man nichts Neues, wenn man daran denkt, dem Definitionsintervall eine s -Abhängigkeit zu geben.) Wichtig ist aber die Surjektivität:

Lemma 8.11. *Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve, so existiert für jedes $X \in \mathfrak{X}^{(\gamma)}(M)$ eine Variation von γ mit Variationsfeld X .*

Beweis. · Eine Möglichkeit ist die Konstruktion einer Variation in lokalen Karten um die Spur von γ herum, mit einer ähnlichen Strategie beim Kartenwechsel wie im Beweis von $\frac{13}{2}.1$.

· Etwas quicker (aber Metrik-abhängig, und nicht unmittelbar auf nicht-kompakte Intervalle verallgemeinerbar) folgt aus 8.6 und der Kompaktheit von $[a, b]$ die Existenz von $\delta > 0$ so dass $\forall t \in [a, b]$ die Geodäte $s \mapsto \gamma_{(\gamma(t), X(t))}(s)$ für mindestens $s \in (-\delta, \delta) \subset I_{(\gamma(t), X(t))}$ existiert. Die Abbildung $(-\delta, \delta) \times I \mapsto \gamma_{(\gamma(t), X(t))}(s)$ ist dann eine Variation von γ mit Variationsfeld X . \square

Die Aussage: $F : \mathcal{W}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ ist kritisch in $\gamma \Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{X}_0^{(\gamma)}(M)$ gilt $dF_\gamma(X) := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(\beta(s, \cdot))$ für eine/jede Variation β von γ mit Variationsfeld X macht also richtigen Sinn. Wir halten ausserdem fest:

Lemma 8.12. *Ist $\beta : (-\delta, \delta) \times I$ eine Variation von γ , so sind die partiellen Ableitungen $\dot{\beta} = \partial_t \beta, \beta' := \partial_s \beta \in \Gamma(\beta^*TM)$ und es gilt mit dem Rückzug $\nabla_t := (\beta^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}}$ $\nabla_s := (\beta^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial s}}$ des Levi-Civita-Zusammenhangs:*

$$\nabla_t \beta' = \nabla_s \dot{\beta} \quad (8.26)$$

Beweis. In lokalen Koordinaten um $\beta(s, t)$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla_t \beta'^i &= \partial_t \partial_s \beta^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\beta}^j \beta'^k \\ \nabla_s \dot{\beta}^i &= \partial_s \partial_t \beta^i + \Gamma_{jk}^i \beta'^j \dot{\beta}^k \end{aligned} \quad (8.27)$$

§ 8. GEODÄTEN

so dass die Aussage sofort aus der Symmetrie der zweiten Ableitung und der der Christoffel-Symbole (7.42) folgt. (Moralisch folgt die Aussage aus $[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}] = 0$, auch wenn dies *keine* Vektorfelder auf M sind.) \square

Beweis von 8.9. (e) Die Differenzierbarkeit von

$$s \mapsto E(\beta(s, \cdot)) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \dot{\beta}(s,t)) dt \quad (8.28)$$

folgt aus den Sätzen über die Vertauschbarkeit von Integration und Ableitung. Zur Berechnung benutzen wir Metrizität, Torsionsfreiheit, und partielle Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\beta(s, \cdot)) &= \int_a^b g(\nabla_s \dot{\beta}, \dot{\beta}) dt = \int_a^b g(\nabla_t \beta', \dot{\beta}) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\beta', \dot{\beta}) dt - \int_a^b g(\beta', \nabla_t \dot{\beta}) dt \end{aligned} \quad (8.29)$$

so dass bei $s = 0$ aus der Eigentlichkeit der Variation folgt:

$$dE_\gamma(X) = \underbrace{g(X, \dot{\gamma})}_=0 \Big|_a^b - \int_a^b g(X, \nabla_t \dot{\gamma}) dt \quad (8.30)$$

$\nabla_t \dot{\gamma} = 0$ impliziert also sofort $dE_\gamma(X) = 0 \forall X \in \mathfrak{X}_0^{(\gamma)}(M)$. Wäre für die umgekehrte Richtung $\nabla_t \dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a, b)$, so sei X ein Variationsfeld mit Träger in der Nähe von t_0 so, dass $g(X, \nabla_t \dot{\gamma}) \geq 0$ auf ganz $[a, b]$ und strikt positiv in einer Umgebung von t_0 . Dann folgt aus der Monotonie des Integrals ein Widerspruch zu $dE_\gamma(X) = 0$. Aus der Stetigkeit folgt $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$ auf ganz $[a, b]$.

(1) Hier hängt die Differenzierbarkeit bei $s = 0$ von der Regularität von γ ab. Mit $w := \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \neq 0$ auf ganz $[a, b]$ finden wir mit den gleichen Schritten wie oben:

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\beta(s, \cdot)) = \int_a^b g(X, -\frac{d}{dt}(w^{-1})\dot{\gamma} - w^{-1}\nabla_t \dot{\gamma}) \quad (8.31)$$

und aus dem gleichen Supportgrund dann die Prägeodätengleichung $\nabla_t \dot{\gamma} = \frac{\dot{w}}{w} \dot{\gamma}$, vgl. auch (8.18). \square

Geodäten sind also Extrema von E und L . Daraus folgt insbesondere, dass ein differenzierbarer Weg (mit festen Endpunkten), in welchem E (oder L) ein globales Minimum¹¹ annimmt, (bis auf Umparametrisierung) eine Geodäte sein muss. (Sonst gäbe es eine Variation mit noch kleineren Werten von E und L .) Daraus folgt aber noch nicht,

- (1) dass unter allen stückweise differenzierbaren (besser wäre: rektifizierbaren) Kurven die differenzierbaren die energieärmsten/kürzesten sind;
- (2) dass eine Kurve minimaler Energie/Länge existieren muss;

¹¹Es existieren niemals lokale, geschweige denn globale Maxima, da man jede gegebene Kurve durch kleine und grosse Umwege um beliebige Werte verlängern kann. Ausnahme: $\dim M = 0$.

(3) dass ein energieärmster/kürzester Weg, falls er existiert, bis auf Umparametrisierung eindeutig sein muss.

Man findet leicht Beispiele, die belegen, dass (3) (Antipoden auf der Sphäre) und (2) ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) im Allgemeinen falsch sind, im Unterschied zur euklidischen Geometrie. Zum Nachweis, dass sie aber *lokal* richtig bleiben und als Korollar (1) implizieren, sieht man am einfachsten nach Einführung intrinsischer und vermessungstechnisch natürlicher Koordinatensysteme.

Normalkoordinaten

In Fortsetzung von 8.6:

Lemma 8.13. · Sei (M, g) eine Rmf., und $\forall (p, v) \in TM$ $\gamma_{(p,v)} : I_{(p,v)} \rightarrow M$ die eindeutig maximal fortgesetzte Geodäte durch p mit $\dot{\gamma}_{(p,v)}(0) = v$. Es gilt:

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^\times : I_{(p,\lambda v)} = \frac{1}{\lambda} I_{(p,v)}$ und $\gamma_{(p,\lambda v)}(t) = \gamma_{(p,v)}(\lambda t)$.

(ii) $\mathcal{E} := \{(p, v) \in TM \mid 1 \in I_{(p,v)}\} \subset TM$ ist offen

(iii) $\mathcal{E}_p = \{v \in T_p M \mid 1 \in I_{(p,v)}\} \subset T_p M$ ist ein Sterngebiet um $0 \in T_p M$.

Beweis. (i) folgt unmittelbar aus der Kettenregel: $\frac{d}{dt} \gamma_{(p,v)}(\lambda t) = \lambda \dot{\gamma}_{(p,v)}(\lambda t)$ etc.

Für (ii) bemerken wir, dass wir mit $v(t) := \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$ die Geodätengleichung (8.11) als Gleichungssystem erster Ordnung (explizit am besten in Koordinaten)

$$\dot{\gamma} = v, \quad \nabla_t v = 0 \tag{8.32}$$

schreiben, und die Lösungen daher als Fluss in TM auffassen können. Dann folgt aus 5.11 die Offenheit von $\mathcal{D} := \{(p, v, t) \mid (p, v) \in TM, t \in I_{(p,v)}\}$ (Vertauschung von Zeit und Ort ist Absicht), genauso wie die von $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cap (TM \times \{1\}) = (TM)_1$ in der Notation von 5.11.

(iii) Die Offenheit von \mathcal{E}_p folgt aus (ii), die Sternförmigkeit, d.h. $v \in \mathcal{E}_p \Rightarrow [0, 1]v \subset \mathcal{E}_p$, aus (i). Beachte: $I_{(p,0)} = \mathbb{R}$, $\gamma_{(p,0)}$ ist konstant. \square

Definition 8.14. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit heisst *geodätisch vollständig*, falls $I_{(p,v)} = \mathbb{R} \forall (p, v) \in TM$, $\Leftrightarrow \mathcal{E} = TM$.

Definition 8.15. Die differenzierbare Abbildung¹²

$$\text{Exp}_p : \mathcal{E}_p \rightarrow M, \quad v \mapsto \text{Exp}_p(v) := \gamma_{(p,v)}(1) \tag{8.33}$$

heisst Exponentialabbildung in p . (Ihre globale Version,

$$\mathcal{E} \ni (p, v) \mapsto \text{Exp}(p, v) := (p, \text{Exp}_p(v)) \in M \times M \tag{8.34}$$

ist ebenfalls differenzierbar.)

Lemma 8.16. Für festes $p \in M$ ist $\text{Exp}_p(0) = p$ und

$$D(\text{Exp}_p)_0 = \text{id} : T_0(T_p M) \cong T_p M \rightarrow T_p M \tag{8.35}$$

(Die Ableitung von $\text{Exp} : TM \supset \mathcal{E} \rightarrow M \times M$ hat auf dem Nullschnitt $M \subset TM$ die Blockgestalt

$$(D \text{Exp})_{(p,0)} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ * & \text{id} \end{pmatrix} \cdot \tag{8.36}$$

¹²exp ist in dieser Vorlesung reserviert für die Matrixexponentialfunktion, bei Lie-Gruppen war das umgekehrt; die beiden stimmen aber in geeignetem Sinne sowieso überein.

§ 8. GEODÄTEN

Beweis. Für jedes $v \in T_0(T_p M) \cong T_p M$ ist für t klein genug $t \mapsto tv \in \mathcal{E}_p$ eine Kurve durch 0 in Richtung v mit Bild

$$\text{Exp}_p(tv) = \gamma_{(p,tv)}(1) = \gamma_{(p,v)}(t) \quad (8.37)$$

daher ist nach (3.26)

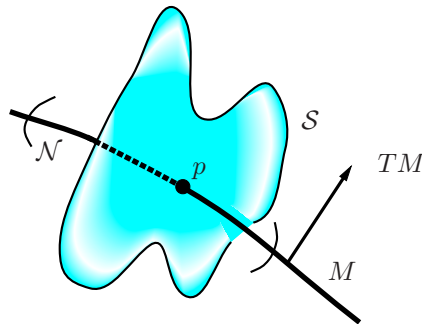
$$(D \text{Exp}_p)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Exp}_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{(p,v)}(t) = v \quad (8.38)$$

(Für die globale Version beachte man die durch den Nullschnitt kanonische Spaltung von (6.6), $T_{(p,0)} TM \cong T_p M \oplus T_p M$.) \square

Aus 8.16 folgt mit dem Satz 4.6 über die Umkehrabbildung, dass Exp_p geeignete Umgebungen von $0 \in T_p M$ diffeomorph auf Umgebungen von $p \in M$ abbildet.

Definition 8.17. · Eine Umgebung \mathcal{N} von p heisst Normalumgebung, falls eine sternförmige Nullumgebung $\mathcal{S} \subset T_p M$ existiert, die durch Exp_p diffeomorph auf \mathcal{N} abgebildet wird.

· Ist (b_1, \dots, b_n) eine Orthonormalbasis für den euklidischen Vektorraum $T_p M$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle := g_p$, und sind (ξ^1, \dots, ξ^n) die zugehörigen linearen Koordinaten, so heisst die Verkettung $\xi \circ \text{Exp}_p^{-1}$ (Riemannsche) Normalkoordinaten (besonders, aber vielleicht nicht nur, auf Normalumgebungen).



Beachte: Es ist bereits klar, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Normalumgebung besitzt. Normalumgebungen sind aber nicht nur nicht eindeutig, sondern im Allgemeinen auch nicht ineinander enthalten. Die Vereinigung von Sterngebieten ist wieder ein Sterngebiet, die Injektivität von Exp_p kann aber verloren gehen. Der Schnitt von zwei Normalumgebungen ist nicht einmal notwendig zusammenhängend. Beispiel: Kreis. Normalumgebungen geben uns aber das erste Eindeutigkeitsresultat für Geodäten.

Lemma 8.18. (i) Ist \mathcal{N} eine Normalumgebung von p , so existiert für alle $q \in \mathcal{N}$ genau eine Geodäte von p nach q , welche ganz in \mathcal{N} liegt. (Mit "genau einer" ist hier "bis auf affin-lineare Umparametrisierung" gemeint. Wir fixieren sie, indem wir das Definitionsintervall $[0, 1]$ vorschreiben.)

(ii) In Normalkoordinaten ist diese Geodäte die gerade Strecke von $0 \in T_p M$ nach $v = \text{Exp}_p^{-1}(q)$.

(iii) Für Metrik-Komponenten und Christoffel-Symbole in Normalkoordinaten um p gilt $\forall i, j, k = 1, \dots, n$:

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \quad (8.39)$$

$$\text{und } \Gamma_{jk}^i(p) = 0 \quad (8.40)$$

Beweis. (i) Existenz: $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma_{(p,v)}(t) = \gamma_{(p,tv)}(1) = \text{Exp}_p(tv)$ ist klarerweise eine solche Geodäte. (Da $\mathcal{S} := \text{Exp}_p^{-1}(\mathcal{N})$ sternförmig ist, gilt $\gamma_{(p,v)}(t) \in \mathcal{N} \forall t \in [0, 1]$.)

Eindeutigkeit: Angenommen, $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ ist eine weitere Geodäte von p nach q , welche ganz in \mathcal{N} verläuft. Setze $w := \dot{\alpha}(0)$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit von Geodäten $\alpha(t) = \text{Exp}_p(tw) \forall t \in [0, 1]$. Es genügt dann zu zeigen, dass $tw \in \mathcal{S} \forall t \in [0, 1]$. (Denn dann impliziert $\text{Exp}_p(w) = q = \text{Exp}_p(v)$ wegen der Injektivität von Exp_p auf \mathcal{S} , dass $w = v$ und daraus folgt $\alpha = \gamma_{(p,v)}$.)

Andernfalls sei $t_0 := \inf\{t \in [0, 1] \mid tw \notin \mathcal{S}\}$. Dann ist wegen der Offenheit von \mathcal{S} $t_0 w \notin \mathcal{S}$, es existiert aber eine Folge (t_n) mit $t_n \rightarrow t_0$ und $t_n w \in \mathcal{S}$. Wegen der Stetigkeit von Exp_p gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Exp}_p(t_n w) = \text{Exp}_p(t_0 w) \quad (8.41)$$

\cap
 \mathcal{N}

\cap
 \mathcal{N}

letzteres wegen $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{N}$. Da aber Exp_p ein Diffeomorphismus von \mathcal{S} auf \mathcal{N} ist, folgt daraus, dass $t_n w$ einen Grenzwert in \mathcal{S} hat (nämlich $(\text{Exp}_p|_{\mathcal{S}})^{-1}(\text{Exp}_p(t_0 w))$), ein Widerspruch. Es gilt also $w \in \mathcal{S}$.

(ii) Ist $v = v^i b_i \in \mathcal{S}$, so hat $\gamma_{(p,v)}(t) = \text{Exp}_p(tv)$ die Koordinatendarstellung:

$$\xi^i(t) = ((\xi \circ \text{Exp}_p^{-1})(\gamma_{(p,v)}(t)))^i = ((\xi \circ \text{Exp}_p^{-1})(\text{Exp}_p(tv)))^i = tv^i \quad (8.42)$$

was die Behauptung ist.

(iii) Per Definition ist $g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \frac{\partial}{\partial \xi^j}\right) = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$. Einsetzen der Lösung (8.42) in die Geodätengleichung in Normalkoordinaten ergibt

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma_{jk}^i(\gamma_{(p,v)}(t)) \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k = \Gamma_{jk}^i(\gamma_{(p,v)}(t)) v^j v^k = 0, \quad (8.43)$$

und bei $t = 0$, dass $\forall i$ die Abbildung

$$\mathcal{S} \ni v \mapsto Q(v) := \Gamma_{jk}^i(p) v^j v^k = 0 \quad (8.44)$$

identisch verschwindet. Da die erlaubten Startrichtungen $T_p M$ aufspannen, folgt durch Polarisierung und lineare Fortsetzung, dass die symmetrische Bilinearform $(v_1, v_2) \mapsto Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) = \sum (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) v_1^j v_2^k = 0 \forall v_1, v_2 \in T_p M$. Wegen (7.42) folgt daraus $\Gamma_{jk}^i(p) = 0 \forall i, j, k$. \square

Beachte: Die Vereinfachung $\Gamma_{jk}^i = 0$ gilt nur in p . Für $\xi \neq 0$ findet man nur jeweils $\Gamma_{jk}^i(\text{Exp}_p(\xi)) \xi^j \xi^k = 0$.

· Die Geodäte von p nach q in \mathcal{N} ist im Allgemeinen weder die einzige noch die kürzeste Geodäte von p nach q in M . Zur Verschärfung bemühen wir die geodätische Polarzerlegung.

Für R klein genug ist Exp_p auf der euklidischen Kugel

$$B_R(0) := \{v \in T_p M \mid \sqrt{\langle v, v \rangle} < R\} \subset T_p M \quad (8.45)$$

ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Wir schreiben

$$C_R(0) := \{v \in T_p M \mid \sqrt{\langle v, v \rangle} = R\} = \overline{\partial B_R(0)} \quad (8.46)$$

für die euklidischen Sphären.

§ 8. GEODÄTEN

Definition 8.19. Man nennt

$$\rho_p := \sup\{R \in \mathbb{R} \mid \text{Exp}_p|_{B_R(0)} \text{ ist Diffeo. auf das Bild}\} \in (0, \infty] \quad (8.47)$$

den Injektivitätsradius in $p \in M$.

· Der globale Injektivitätsradius, $\inf\{\rho_p, p \in M\} \geq 0$ ist grösser Null falls M kompakt ist.

· Für $R \leq \rho_p$ heisst $K_R(p) := \text{Exp}_p(B_R(0))$ geodätische Kugel vom Radius R .

Lemma 8.20. · Jede $K_R(p)$ (auch $K_{\rho_p}(p)$) ist eine Normalumgebung von p .

· Die auf $K_{\rho_p}(p)$ durch

$$r(q)^2 := \langle \text{Exp}_p^{-1}(q), \text{Exp}_p^{-1}(q) \rangle = \sum_{i=1}^n (\xi^i(q))^2 \quad (8.48)$$

definierte Radius-Funktion $r : K_{\rho_p}(p) \rightarrow [0, \rho_p]$ ist stetig, ausserhalb von p positiv und differenzierbar mit $dr(q) \neq 0 \forall q \neq p$. r^2 ist auf ganz $K_{\rho_p}(p)$ differenzierbar.

· Für alle $0 < R < \rho_p$ ist

$$S_R(p) := r^{-1}(R) = \text{Exp}_p(C_R(0)) \quad (8.49)$$

eine kompakte $n-1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M , genannt geodätische Sphäre um p .

· Die auf Bogenlänge parametrisierten Geodäten durch p sind ausserhalb von p die Integalkurven des radialen Einheitsvektorsfeldes auf $K_{\rho_p}(p)$,

$$\partial_r := \frac{\xi^i}{r} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (8.50)$$

Es gilt: $g(\partial_r, \partial_r) = 1$.

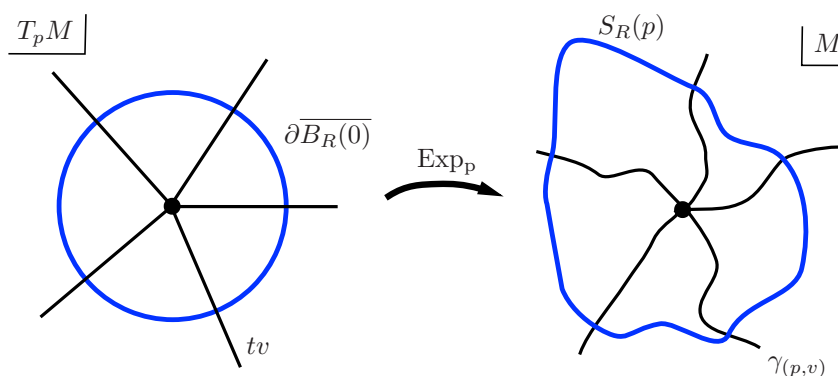
Beweis. grösstenteils offensichtlich. Die erste Aussage zu ∂_r folgt aus 8.18 (ii) und elementarer Analysis: Für $q \in K_{\rho_p}(p) \setminus \{p\}$ ist mit $\hat{v} := \text{Exp}_p^{-1}(q)/r(q)$ die auf Bogenlänge parametrisierte radiale Geodäte gegeben durch $[0, r(q)] \ni t \mapsto \text{Exp}_p(t\hat{v})$. Sie erfüllt $r(t) := r(\text{Exp}_p(t\hat{v})) = t$ und in Normalkoordinaten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{tv^i}{r(q)} \right) = \frac{tv^i}{tr(q)} = \frac{\xi^i(t)}{r(t)} \quad (8.51)$$

was gerade heisst, dass $\frac{d}{dt} \text{Exp}_t(t\hat{v}) = \partial_r$. Die Aussage $g(\partial_r, \partial_r) = 1$ folgt dann (nicht bereits aus (8.39)!, sondern) wegen 8.7 (i) aus $\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle = 1$. \square

Zur geometrischen Rechtfertigung der Bezeichnungen sollten wir begründen, dass $K_R(p)$ tatsächlich aus den Punkten besteht, deren ‘‘Abstand’’ von p kleiner als R ist. Davor bemerken wir, dass die geodätischen Sphären zwar per Definition diffeomorph, i.A. aber nicht isometrisch zu den euklidischen Standardsphären sind. Der Tangentialraum zu $S_R(p)$ in $q = \text{Exp}_p(v)$ mit $r(q) = R = \langle v, v \rangle^{1/2}$ ist

$$T_q S_R(p) = \text{Ker}(dr_q) = (D \text{Exp}_p)_v(T_v C_R(0)) \quad (8.52)$$



wobei bekanntlich

$$T_v C_R(0) = v^\perp = \{w \in T_p M \mid \langle v, w \rangle = 0\} \quad (8.53)$$

Insbesondere ist $(D \text{Exp}_p)_v : T_p M \rightarrow T_q M$ nicht der Paralleltransport entlang der radialen Geodäte (sonst wäre nämlich die Einschränkung auf v^\perp eine Isometrie). Es gilt aber:

Proposition 8.21 (Gauss-Lemma). *Die geodätischen Sphären sind orthogonal zu den radialen Geodäten, d.h. $\forall q = \text{Exp}_p(v) \in S_R(p)$, $w_q \in T_q S_R(p)$ gilt*

$$g_q((\partial_r)_q, w_q) = 0 \quad (8.54)$$

Beweis. Wir zeigen die allgemeinere Aussage: $\forall v \in \mathcal{E}_p \subset T_p M$, $\forall w \in T_p M \cong T_v T_p M$ gilt mit $w_q := (D \text{Exp}_p)_v(w)$ und $v_q := (D \text{Exp}_p)_v(v)$:

$$g_q(v_q, w_q) = \langle v, w \rangle \quad (8.55)$$

(Die Aussage des Lemmas folgt dann für aus (8.53) und $v_q = r(q)(\partial_r)_q$, vgl. (8.51).)
 · Sei dazu $\delta > 0$ so klein, dass $v + sw \in \mathcal{E}_p \forall s \in (-\delta, \delta)$ (\mathcal{E}_p ist offen), und $\beta : (-\delta, \delta) \times [0, 1] \rightarrow M$ die Variation der Geodäte von p nach q , gegeben durch

$$\beta(s, t) = \text{Exp}_p(t(v + sw)) \quad (8.56)$$

Ihre longitudinalen Kurven sind Geodäten durch p in Starttrichtung

$$\dot{\beta}(s, 0) = v + sw \quad (8.57)$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \beta'(0, 0) &= 0, & \beta'(0, 1) &= w_q \\ \dot{\beta}(0, 0) &= v, & \dot{\beta}(0, 1) &= v_q \end{aligned} \quad (8.58)$$

Die Behauptung $g_{\beta(0,1)}(\dot{\beta}(0, 1), \beta'(0, 1)) = \langle v, w \rangle$ folgt dann aus $g_p(\dot{\beta}(0, 0), \beta'(0, 0)) = \langle v, 0 \rangle = 0$ falls wir zeigen können, dass

§ 8. GEODÄTEN

Beh.: $\frac{d}{dt} \left(g_{\beta(0,t)}(\dot{\beta}(0,t), \beta'(0,t)) \right) = \langle v, w \rangle$

Bew.: Wegen 8.10 und 8.12 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \beta'(s,t)) &= g_{\beta(s,t)} \underbrace{(\nabla_t \dot{\beta}(s,t), \beta'(s,t))}_{=0} + g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \nabla_t \beta'(s,t)) \\ &= g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \nabla_s \dot{\beta}(s,t)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{ds} g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \dot{\beta}(s,t)) \right) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Die longitudinalen Kurven sind als Geodäten aber proportional zur Bogenlänge parametrisiert (s. 8.7), und zwar ist mit (8.57):

$$\begin{aligned} g_{\beta(s,t)}(\dot{\beta}(s,t), \dot{\beta}(s,t)) &= g_{\beta(s,0)}(\dot{\beta}(s,0), \dot{\beta}(s,0)) \\ &= \langle v + sw, v + sw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2s \langle v, w \rangle + s^2 \langle w, w \rangle \end{aligned} \quad (8.60)$$

Oben eingesetzt und bei $s = 0$ ausgewertet ergibt die Behauptung. \square

Korollar 8.22. Auf $K_{\rho_p}(p) \setminus \{0\}$ gilt: $\partial_r = (dr)^\sharp$

Beweis. Schreiben wir die gemäss 8.21 orthogonale Zerlegung $T_q M = \mathbb{R} \partial_r \oplus T_q S_R(p)$ für einen beliebigen Vektor $w_q \in T_q M$ als

$$w_q = (w_q)_r \partial_r + w_{q\perp} \quad (8.61)$$

so gilt wegen (8.52) $dr(w_{q\perp}) = 0$, per Definition $dr(\partial_r) = 1$ und wegen 8.20 $g(\partial_r, \partial_r) = 1$. Zusammen folgt

$$(w_q)_r = g_q(w_q, \partial_r) = dr(w_q) \quad (8.62)$$

\square

Proposition 8.23. Es sei $\alpha : [a, b] \rightarrow K_{\rho_p}(p)$ ein stückweise differenzierbarer Weg von p nach q .

(i) Es gilt: $L(\alpha) \geq L(\gamma_{(p,v)})$.

(ii) Gilt $L(\alpha) = L(\gamma_{(p,v)})$, so existiert eine monotone surjektive stückweise differenzierbare Funktion $h : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ so dass $\alpha = \gamma_{(p,v)} \circ h$.

Beweis. (i) Es genügt zu zeigen, dass $L(\alpha) \geq r(q)$ falls $\alpha(t) \neq p \forall t > a$. (Sonst verkürzen wir α auf $[a_0, b]$ mit $a_0 := \sup\{t \mid \alpha(t) = p\}$.)

· Nach Pythagoras (oder gleich Cauchy-Schwarz) gilt entlang der differenzierbaren Stücke von $\alpha|_{(a,b)}$,

$$\begin{aligned} g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) &= g(\partial_r, \dot{\alpha})^2 + g(\dot{\alpha}_\perp, \dot{\alpha}_\perp) \\ \Rightarrow g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})^{1/2} &\geq |g(\partial_r, \dot{\alpha})| \geq g(\partial_r, \dot{\alpha}) = dr(\dot{\alpha}) \end{aligned} \quad (8.63)$$

Letzteres wegen 8.22. Durch Integration folgt (stückweise, bzw. mit dem Satz von Stokes)

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \lim_{\tau \searrow a} \int_{\tau}^b g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})^{1/2} dt \\ &\geq \lim_{\tau \searrow a} \int_{\tau}^b \frac{d}{dt} r(\alpha(t)) dt \\ &= \lim_{\tau \searrow a} (r(q) - r(\tau)) = r(q) \end{aligned} \tag{8.64}$$

wegen der Stetigkeit von r .

(ii) Im Falle $L(\alpha) = L(\gamma_{(p,v)})$ muss zunächst $\dot{\alpha}_{\perp} = 0$ sein, d.h. α verläuft entlang der radialen Geodäte, und ausserdem $dr(\dot{\alpha}) \geq 0$. Durch stückweise Integration der Differentialgleichung

$$\dot{\alpha} = g(\partial_r, \dot{\alpha}) \partial_r \tag{8.65}$$

folgt mit $h(t) = \int_a^t dr(\dot{\alpha}) dt / r(q)$ die Behauptung. \square

Korollar 8.24. $\forall p \in M, q \in K_{\rho_p}(p)$ ist die radiale Geodäte bis auf Umparametrisierung der eindeutig kürzeste stückweise differenzierbare Weg von p nach q in M .

Beweis. Wege innerhalb von $K_{\rho_p}(p)$ sind nach 8.23 entweder länger als die Geodäte oder folgen ihrer Spur.

· Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ noch ein Weg von p nach q in M , welcher nicht ganz in $K_{\rho_p}(p)$ liegt, so existiert für jedes (beliebige) R mit $r(q) < R < \rho_p$ ein $b_0 \in [a, b]$ mit $\alpha(b_0) \in S_R(p)$. (Andernfalls zerfällt $\alpha([a, b])$ in (mindestens) zwei nicht-leere offene Mengen, $(\alpha([a, b]) \cap K_R(p)) \cup (\alpha([a, b]) \cap (M \setminus K_R(p)))$, was wegen der Stetigkeit nicht sein kann.) Dann ist aber gemäss 8.23 bereits $L(\alpha|_{[a, b_0]}) \geq R > r(q) = L(\gamma_{(p,v)})$. \square

Bemerkungen. Offensichtlich kann man die Radius-Funktion 8.48 auch in Normalumgebungen \mathcal{N} von p definieren, welche nicht ganz in $K_{\rho_p}(p)$ enthalten sind. Sie ist dann allerdings ausserhalb von $K_{\rho_p}(p)$ von der Wahl von \mathcal{N} abhängig. Es gilt dann in Abänderung von 8.24: $\forall q \in \mathcal{N}$ ist die radiale Geodäte der bis auf Umparametrisierung eindeutig kürzeste stückweise differenzierbare Weg von p nach q , welcher ganz in \mathcal{N} verläuft.

Jetzt ist aber überfällig:

Definition 8.25. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist $\forall p, q \in M$

$$\mathfrak{W}_{p,q} := \{ \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise differenzierbarer Weg von } p \text{ nach } q \} \tag{8.66}$$

nicht leer. Die Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(p, q) := \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma \in \mathfrak{W}_{p,q} \} \tag{8.67}$$

heisst Riemannsche Abstandsfunktion auf M .

· Ein Weg $\gamma \in \mathfrak{W}_{p,q}$ heisst längenminimierend, falls $L(\gamma) = d(p, q)$.

§8. GEODÄTEN

Lemma 8.26. Die Abstandsfunktion erfüllt $\forall p, q, o \in M$:

(i) $d(p, q) \geq 0$, $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$;

(ii) $d(p, q) = d(q, p)$;

(iii) $d(p, q) \leq d(p, o) + d(o, q)$.

(M, d) ist also ein metrischer Raum.

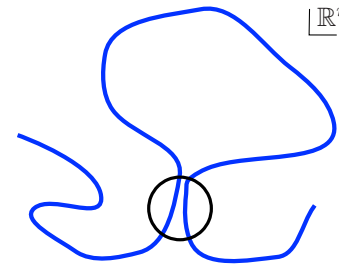
Beweis. Die einzige nicht ganz offensichtliche Implikation ist $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$. Ist aber $p \neq q$, so existiert eine offene Umgebung U von p mit $q \notin U$ und ein $\epsilon > 0$ so dass die geodätische Kugel $K_\epsilon(p) \subset U$ (Stetigkeit der Exponentialfunktion). Aus $q \notin K_\epsilon(p)$ folgt dann wie im Beweis von 8.24, dass jeder stückweise differenzierbare Weg von p nach q mindestens ϵ lang ist, d.h. auch $d(p, q) \geq \epsilon$. \square

Proposition 8.27. Die von d induzierte Topologie fällt mit der kanonischen Topologie von M als topologische Mannigfaltigkeit zusammen.

Beweis. Die metrischen Kugeln $\{\{q \in M \mid d(p, q) < R\} \mid p \in M, R \leq \rho_p\}$ bilden eine Basis der von d induzierten Topologie. Gemäss dem Beweis von 8.24 bzw. 8.26 sind sie aber gleich den geodätischen Kugeln $K_R(p)$ und daher wegen 8.20 offen in M . Die kanonische Topologie ist also feiner als die metrische.

· Umgekehrt haben wir eben schon benutzt, dass $\forall U \subset M$ offen, $\forall p \in U$ $K_\epsilon(p) \subset U$ für geeignetes $\epsilon > 0$. U ist also offen in der metrischen Topologie, d.h. die metrische Topologie ist feiner als die kanonische. \square

· Beachte, dass die (“intrinsische”) Riemannsche Abstandsfunktion auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^m$ stark von der “extrinsischen” auf \mathbb{R}^m abweichen kann, auch wenn sie die gleiche Topologie induzieren. (Das Bild illustriert $d_{\mathbb{R}^m} \ll d_M$, die stereographische Projektion die umgekehrte Situation; Äquivalenz der Topologie impliziert noch nicht Äquivalenz der Abstandsfunktionen....)



· Gemäss 8.18 sind radiale Geodäten in Normalumgebungen eindeutig, und gemäss 8.24 in geodätischen Kugeln auch längenminimierend in M . Wir beschäftigen uns nun mit Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten zwischen variablen Punkten in einer Umgebung eines festen p 's.

Definition 8.28. Eine offene Menge $\mathcal{C} \subset M$ heisst (geodätisch) konvex, falls \mathcal{C} eine Normalumgebung eines jeden $q \in \mathcal{C}$ ist. Insbesondere existiert zwischen je zwei Punkten p und q in einer konvexen Menge genau eine Geodäte, welche ganz in \mathcal{C} verläuft, und diese Geodäte ist der bis auf Umparametrisierung eindeutig kürzeste stückweise differenzierbare Weg von p nach q in \mathcal{C} .

(Die Aussage zur Eindeutigkeit folgt aus 8.18, die zur Längenminimierung aus den Bemerkungen unter 8.24.)

Theorem 8.29. Jeder Punkt $p \in M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit besitzt eine geodätisch konvexe Umgebung.

Beweis. Wir schreiben im Folgenden $K_\epsilon := K_\epsilon(p)$ für geodätische Kugeln vom Radius $\epsilon > 0$ um p .

1. Schritt: Wir fixieren Normalkoordinaten $(\mathcal{N}, (\xi^1, \dots, \xi^n))$ um p und definieren den symmetrischen $(0, 2)$ Tensor H auf \mathcal{N} durch die Komponenten

$$H_{ij} = \delta_{ij} - \sum_k \xi^k \Gamma_{ij}^k \quad (8.68)$$

(Γ_{ij}^k sind die Christoffel-Symbole in Normalkoordinaten, ohne Widerspruch zu (7.44)!) Da gemäss 8.18 (iii) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, existiert $\epsilon_1 > 0$ so klein, dass H auf $K_{\epsilon_1} \subset \mathcal{N}$ positiv definit ist.

· Wir machen ausserdem $\epsilon_1 > 0$ so klein, dass $\forall k$

$$\sum_{i,j} |\Gamma_{ij}^k| < 1 \quad \text{auf } K_{\epsilon_1} \quad (8.69)$$

2. Schritt: Für jede nicht-konstante (aber nicht notwendigerweise radiale!) Geodäte $\alpha : [0, 1] \rightarrow K_{\epsilon_1}$, welche ganz in K_{ϵ_1} verläuft, ist $N(\alpha(t)) := r^2(t) = (r(\alpha(t)))^2$ differenzierbar (vgl. 8.20), und schreiben wir $\xi^i(t)$ für die Koordinaten von α , so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} N(\alpha(t)) &= \frac{d^2}{dt^2} \sum_k (\xi^k(t))^2 = 2 \sum_k (\dot{\xi}^k(t))^2 + \xi^k(t) \ddot{\xi}^k(t) \\ \text{(Geodätengleichung)} &= 2 \sum_k (\dot{\xi}^k(t))^2 - \xi^k(t) \Gamma_{ij}^k \dot{\xi}^i(t) \dot{\xi}^j(t) \\ &= 2H(\dot{\xi}(t), \dot{\xi}(t)) > 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

wegen des 1. Schritts und $\dot{\xi}(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$. Es folgt daraus, dass N ihr Maximum nicht auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ annimmt, d.h. $\forall t \in [0, 1]$ gilt

$$N(\alpha(t)) \leq \max\{N(\alpha(0)), N(\alpha(1))\} \quad (8.71)$$

3. Schritt: Die Abbildung

$$\text{Exp} : TM \supset \mathcal{E} \ni (p, v) \mapsto (p, \text{Exp}_p(v)) \in M \times M \quad (8.72)$$

ist wegen (8.36) in einer Umgebung von $(p, 0) \in TM$ ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung von $(p, p) \in M \times M$.

· $\forall \epsilon > 0$ genügend klein (insbesondere sei $\epsilon \leq \epsilon_1$) ist dann

$$(\text{Exp})^{-1} : K_\epsilon \times K_\epsilon \rightarrow W_\epsilon \subset TM \quad (8.73)$$

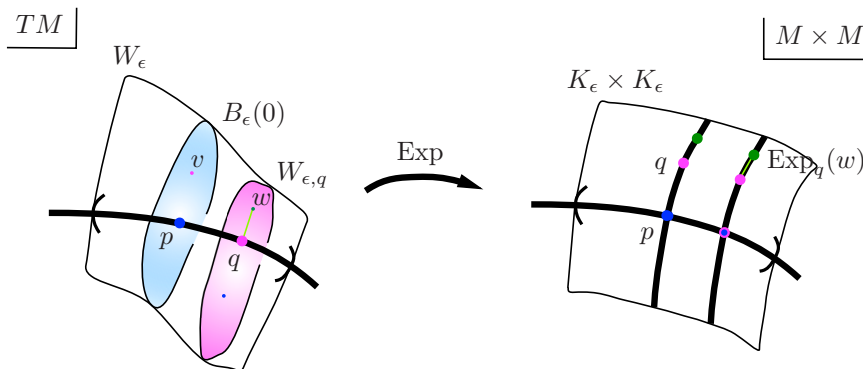
ein Diffeomorphismus auf eine Umgebung W_ϵ von $(p, 0)$. (Die K_ϵ sind Umgebungsbasis.) Durch Projektion auf M folgt, dass $\forall q \in K_\epsilon$

$$\text{Exp}_q : W_{\epsilon,q} := W_\epsilon \cap T_q M \rightarrow K_\epsilon \quad (8.74)$$

ein Diffeomorphismus ist. Nun ist $K_\epsilon = K_\epsilon(p)$ eine geodätische Kugel um p , nicht aber um q . Wir behaupten allerdings, dass für genügend kleines $\epsilon > 0$ $W_{\epsilon,q}$ noch ein Sterngebiet um $0 \in T_q M$ ist. (Dann ist nämlich K_ϵ eine Normalumgebung von $q \forall q \in K_\epsilon$, und damit geodätisch konvex.)

· Es ist klar, dass $0 \in W_{\epsilon,q}$ und offen in $T_q M$. Wir halten ausserdem fest, dass für $\epsilon \rightarrow 0$, $W_\epsilon \rightarrow \{(p, 0)\}$, d.h. jede Umgebung von $(p, 0)$ enthält W_ϵ für genügend kleines ϵ .

§8. GEODÄTEN



4. Schritt: $\forall w \in W_{\epsilon,q}$ ist $[0, 1] \ni t \mapsto \text{Exp}_q(tw)$ eine Geodäte (zunächst in M) von $q \in K_\epsilon$ nach $\text{Exp}_q(w) \in K_\epsilon$. Wenn wir zeigen können, dass $\text{Exp}_q(tw) \in K_\epsilon \forall t$, dann folgt aus der Tatsache, dass $\text{Exp}_q^{-1} : K_\epsilon \rightarrow W_{\epsilon,q}$ ein Diffeomorphismus ist, dass $tw \in W_{\epsilon,q} \forall t \in [0, 1]$, d.h. $W_{\epsilon,q}$ sternförmig ist.

· Tatsächlich genügt es zu zeigen, dass

$$\text{Exp}_q(tw) \in K_{\epsilon_1} \quad \forall t \in [0, 1] \tag{8.75}$$

denn dann folgt aus (8.71) bereits $N(\text{Exp}_q(tw)) \leq \max\{N(q), N(\text{Exp}_q(w))\} < \epsilon^2$, d.h. $\text{Exp}_q(tw) \in K_\epsilon$.

· Wir suchen also ein $\epsilon \leq \epsilon_1$ s.d. (8.75) gilt $\forall (q, w) \in W_\epsilon, t \in [0, 1]$.

5. Schritt: ¹³

$$c_\epsilon := \sup_{\substack{(q,w) \in W_\epsilon \\ k=1,\dots,n}} |D(\text{Exp}_p^{-1} \text{Exp}_q)_0(w)^k| \tag{8.76}$$

Da $(q, w) \mapsto |D(\text{Exp}_p^{-1} \text{Exp}_q)_0(w)^k|$ stetig ist und $(p, 0)$ auf 0 abbildet, und da $W_\epsilon \rightarrow \{(p, 0)\}$ im Sinne des 3. Schritts, gilt $c_\epsilon \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$.

· Es existiert also ein $\epsilon > 0$ so, dass gleichzeitig

$$c_\epsilon < \frac{1}{4} \tag{8.77}$$

$$\sqrt{n} \cdot (\epsilon + 2c_\epsilon) < \epsilon_1 \tag{8.78}$$

Wir behaupten, dass mit solch einem ϵ (8.75) erfüllt ist.

Bew.: Wir betrachten also für $(q, w) \in W_\epsilon$ die Geodäte $[0, 1] \ni t \mapsto \text{Exp}_q(tw)$. Klarerweise ist $\text{Exp}_q(tw) \in K_\epsilon$ für alle kleinen Zeiten $t > 0$, so dass wir uns zumindestens am Anfang die Geodäte in den Normalkoordinaten anschauen können. Wir nennen sie $\xi^k(t)$ solange sie Sinne machen. Die Anfangsgeschwindigkeit ist einfach

$$\dot{\xi}^k(0) = D(\text{Exp}_p^{-1} \text{Exp}_q)_0(w)^k \tag{8.79}$$

¹³Hier wird gezeigt, dass für kleines ϵ Geodäten mit Startwerten $(q, w) \in W_\epsilon$ sich nicht weiter als ϵ_1 von p entfernen. Tatsächlich folgt schon aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{E} \times [0, 1] \ni (p, v, t) \mapsto \text{Exp}_p(tv)$, mit $\text{Exp}_p(t \cdot 0) = p$, dass $\forall t \in [0, 1]$ eine Umgebung $W_t \times (t - \delta, t + \delta) \ni (p, 0, t)$ existiert, deren Bild in K_{ϵ_1} liegt. Das kompakte Intervall $[0, 1]$ wird von endlich vielen $(t - \delta, t + \delta)$ überdeckt und der Schnitt der zugehörigen W_t ist noch eine Umgebung von $(p, 0)$ und enthält W_ϵ für ϵ klein genug mit der geforderten Eigenschaft.

d.h. per Definition ist $|\dot{\xi}^k(0)| \leq c_\epsilon \forall k$. Ausserdem gilt (wegen $q \in K_\epsilon$) $|\xi^k(0)| < \epsilon$. Es sei dann

$$t_* := \sup\{t \in (0, 1] \mid \forall s \in [0, t] \text{ gilt } N(\text{Exp}_q(sw)) < (\epsilon_1)^2, |\dot{\xi}^k(s)| < 2c_\epsilon\} \quad (8.80)$$

Wegen der Stetigkeit und obigen Abschätzungen ist $0 < t_* \leq 1$.

· Wir können dann $\forall t < t_*$ unsere Geodäte in Normalkoordinaten mit dem HDI abschätzen:

$$\begin{aligned} |\ddot{\xi}^k(s)| &= |\Gamma_{ij}^k \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j(s)| < (2c_\epsilon)^2 \quad (\text{wegen (8.69) und Def. von } t_* > t \geq s) \\ \Rightarrow |\dot{\xi}^k(t)| &\stackrel{(1)}{<} \underbrace{|\dot{\xi}^k(0)|}_{\leq c_\epsilon} + 4c_\epsilon^2 \stackrel{(2)}{<} 2c_\epsilon \quad (\text{beachte } c_\epsilon < \frac{1}{4} \text{ wegen (8.77)}) \\ \Rightarrow |\xi^k(t)| &\stackrel{(1)}{<} |\xi^k(0)| + 2c_\epsilon \stackrel{(2)}{<} \epsilon + 2c_\epsilon \\ \Rightarrow N(\text{Exp}_1(tw)) &\stackrel{(1)}{<} n(\epsilon + 2c_\epsilon)^2 \stackrel{(2)}{<} (\epsilon_1)^2 \quad (\text{nach (8.78)}) \end{aligned} \quad (8.81)$$

Aus Stetigkeitsgründen bleiben im Limes $t \nearrow t_*$ die $\stackrel{(1)}{<}$ Ungleichungen zumindestens als \leq gültig, die $\stackrel{(2)}{<}$ aber strikt. Wäre $t_* < 1$ so blieben die Ungleichungen aus Stetigkeitsgründen noch für t etwas grösser als t_* gültig, was mit (8.80) auf die unsinnige Aussage $t_* > t_*$ führen würde. Es gilt also $t_* = 1$, d.h. insbesondere $N(\text{Exp}_q(sw)) < (\epsilon_1)^2 \forall s \in [0, 1]$, was zu zeigen war. \square

· Wie schon im Beweis bemerkt ist eine konvexe Umgebung keine geodätische Kugel um jeden ihrer Punkte. Wir nennen \mathcal{C} *minimal konvex*, wenn für je zwei Punkte in \mathcal{C} die eindeutige verbindende Geodäte in \mathcal{C} eindeutig längenminimierend in M ist.

Korollar 8.30. Für $\epsilon > 0$ klein genug sind die K_ϵ aus dem Beweis von 8.29 *minimal konvex*.

Beweis. Zurück im 3. Schritt des Beweises von 8.29 wählen wir eine Umgebung \tilde{W} von $(0, p)$ in TM so, dass Exp auf \tilde{W} ein Diffeomorphismus ist und ausserdem $\tilde{W} \cap T_q M \subset B_{\rho_q}(0) \forall q$. (Hier ist ρ_q der Injektivitätsradius in q . Dass ein solches \tilde{W} existiert, folgt aus der einfachen Tatsache, dass $\cup B_{\rho_q}(0)$ eine Umgebung von $M \subset TM$ ist.) Anschliessend wählt man $\epsilon > 0$ noch so klein, dass $K_\epsilon \times K_\epsilon \subset \text{Exp}(\tilde{W})$, d.h. $W_\epsilon \subset \tilde{W}$. Dann folgt aber $K_\epsilon \subset K_{\rho_q}(q) \forall q \in K_\epsilon$, und die Aussage somit aus 8.24. \square

Ein wichtiger Vorteil gegenüber nur konvexen Mengen ist, dass der Schnitt von zwei minimal konvexen Mengen wieder minimal konvex ist. (Übungsaufgabe).

Korollar 8.31. Jeder längenminimierende Weg α von p nach q in M ist bis auf Umparametrisierung eine Geodäte.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass α zu jeder Zeit t_0 eine Geodäte ist. Sei dazu \mathcal{C} eine konvexe Umgebung von $\alpha(t_0)$, und $\epsilon > 0$ mit $\alpha(t_0 - \epsilon), \alpha(t_0 + \epsilon) \in \mathcal{C}$. Dann ist α auf $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ bis auf Umparametrisierung die eindeutige längenminimierende Geodäte von $\alpha(t_0 - \epsilon)$ nach $\alpha(t_0 + \epsilon)$ in \mathcal{C} . \square

Vollständigkeit

Unser Ziel:

Theorem 8.32 (Satz von Hopf-Rinow). *Für eine (nicht-leere) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Riemannscher Abstandsfunktion d sind äquivalent:*

(HB) *Jede beschränkte abgeschlossene Menge in M ist kompakt. (Eine Teilmenge $A \subset M$ heisst beschränkt, falls $\sup\{d(p, q) \mid p, q \in A\} < \infty$.)*

(MV) *(M, d) ist ein vollständiger metrischer Raum (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert).*

(GV) *(M, g) ist geodätisch vollständig (s. 8.14).*

(GV₁) *Es existiert ein $p \in M$ so, dass Exp_p auf ganz T_pM definiert ist.*

Aus jeder dieser Bedingungen folgt:

(HR) *Zwischen je zwei Punkten $p, q \in M$ existiert eine längenminimierende Geodäte.*

Beachte: $\cdot \text{Exp}_p$ ist i.A. natürlich nicht injektiv auf T_pM , und die längenminimierende Geodäte nicht eindeutig.

\cdot Aus (HR) alleine folgt nicht, dass (M, d) vollständig ist. Beispiel: $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik.

Wir erinnern zunächst an ein paar Aussagen aus der Analysis und beweisen dann zwei Lemmata.

Proposition 8.33. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(0) *$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in der von d induzierten Topologie.*

(i) *X ist genau dann (überdeckungs-)kompakt, wenn X folgenkompakt ist.*

(ii) *Ist X kompakt, so ist X vollständig.*

(iii) *Ist jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge von X kompakt, so ist X vollständig.*

Beweis. (0) ist trivial, (i) eine Version von Heine-Borel.

(ii) Jede Cauchy-Folge $(x_i) \subset X$ besitzt wegen der Folgenkompaktheit eine konvergente Teilfolge und konvergiert gegen deren Grenzwert.

(iii) Jede Cauchy-Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt. Ist also $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , so ist $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Wegen der Stetigkeit von d ist dann auch $\overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$ beschränkt, also nach Voraussetzung kompakt. Wegen (ii) konvergiert $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}}$, mithin auch in X . \square

Lemma 8.34. *Angenommen, eine Geodäte $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ besitzt eine stetige Fortsetzung auf $[0, b]$ (d.h. es existiert $\lim_{t \uparrow b} \gamma(t) =: \gamma(b)$). Dann existiert eine geodätische Fortsetzung von γ auf $[0, b + \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$.*

Beweis. Sei \mathcal{C} eine konvexe Umgebung von $\gamma(b)$ (existiert nach 8.29), und $a \in [0, b)$ mit $\gamma([a, b]) \subset \mathcal{C}$. Sei $p := \gamma(a)$ und $v := \dot{\gamma}(a) \in T_pM$. Wegen der Eindeutigkeit der Geodäten in \mathcal{C} (s. 8.28) gilt $\gamma(t) = \text{Exp}_p((t - a)v) \forall t \in [a, b)$.

\cdot Wegen der Stetigkeit von Exp_p^{-1} gilt $(b - a)v = \lim_{t \uparrow b} \text{Exp}_p^{-1}(\gamma(t)) = \text{Exp}_p^{-1}(\gamma(b)) \in \text{Exp}_p^{-1}(\mathcal{C})$, d.h. $\gamma(b) = \text{Exp}_p((b - a)v)$.

\cdot Wegen der Offenheit von $\text{Exp}_p^{-1}(\mathcal{C})$ existiert dann die Geodäte $\text{Exp}_p(tv)$ aber auch noch für $t \in [0, b - a + \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ und damit definiert $[a, b + \epsilon) \ni t \mapsto \text{Exp}_p((t - a)v)$ eine Fortsetzung von γ über b hinaus. \square

Lemma 8.35. Aus (GV_p) folgt (HR_p) : Ist $p \in M$ so, dass Exp_p auf ganz T_pM definiert ist, so existiert für jedes $q \neq p$ ein $\hat{v} \in C_1(0) \subset T_pM$ mit $\gamma_{(p,\hat{v})}(d(p,q)) = q$, d.h. mit $v := d(p,q)\hat{v}$ ist $\gamma_{(p,v)} : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodäte von p nach q mit Länge $d(p,q)$, also insbesondere längenminimierend.

Beweis. Wähle τ_0 mit $0 < \tau_0 < \min\{\rho_p, d(p,q)\}$. Dann ist gemäss 8.24 $S_{\tau_0}(p)$ kompakt, so daß die stetige Funktion $d(\cdot, q)|_{S_{\tau_0}(p)}$ an einer Stelle $m_0 \in S_{\tau_0}(p)$ ihr Minimum annimmt.

Beh. 1: $d(p,q) = \tau_0 + d(m_0, q)$

Bew.: Wegen $\tau_0 = d(p, m_0)$ (s. 8.24) folgt (Dreiecksungleichung), dass $d(p, q) \leq \tau_0 + d(m_0, q)$. Für die umgekehrte Richtung sei $\epsilon > 0$ und $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg von p nach q mit $L(\alpha) < d(p, q) + \epsilon$. Aus der Stetigkeit von $d(\cdot, p)$ auf der Spur von α folgt die Existenz einer Stelle $c \in (a, b)$ mit $d(\alpha(c), p) = \tau_0$, d.h. $\alpha(c) \in S_{\tau_0}(p)$. Wegen 8.24 ist $L(\alpha|_{[a,c]}) \geq \tau_0$ und wegen der Definition von m_0 (als Minimumsstelle von $d(\cdot, q)$) gilt $L(\alpha|_{[c,b]}) \geq d(m_0, q)$. Es folgt $d(p, q) > L(\alpha) - \epsilon \geq \tau_0 + d(m_0, q) - \epsilon \forall \epsilon > 0$, mit $\epsilon \rightarrow 0$ $d(p, q) \geq \tau_0 + d(m_0, q)$. □_{Beh. 1}

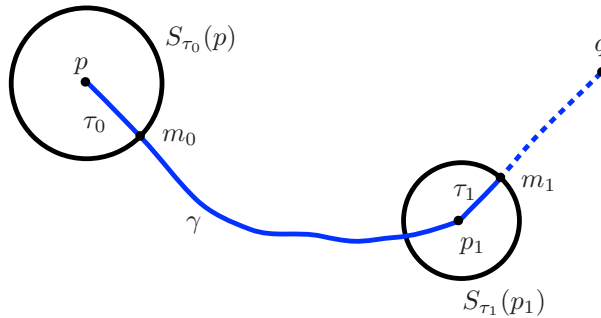
Der Vektor $v := \text{Exp}_p^{-1}(m_0) \in T_pM$ erfüllt $\langle v, v \rangle^{1/2} = \tau_0$, und $\hat{v} := v/\tau_0 \in C_1(0)$. Die Geodäte $\gamma := \gamma_{(p,\hat{v})}$ erfüllt nach Konstruktion $\gamma(\tau_0) = m_0$ und existiert nach Voraussetzung auf ganz \mathbb{R} . Wir behaupten, dass sie die geforderte Bedingung erfüllt, d.h. $\gamma(d(p,q)) = q$. Zum Nachweis betrachten wir

$$\mathbb{T} := \{t \in]0, d(p,q)] \mid d(p,q) = \underbrace{L(\gamma|_{[0,t]})}_{=t} + d(\gamma(t), q)\} \subset \mathbb{R} \quad (8.82)$$

Aus $d(p, q) \leq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) \leq L(\gamma|_{[0,t]}) + d(\gamma(t), q)$ folgt $t = d(p, \gamma(t)) \forall t \in \mathbb{T}$. Wegen Beh. 1 ist \mathbb{T} nicht leer. Sei $t_1 := \sup \mathbb{T} \in (0, d(p,q)]$. Weil γ auf ganz \mathbb{R} existiert, und die Funktion $t \mapsto t + d(\gamma(t), q)$ stetig ist, gilt $t_1 \in \mathbb{T}$. Wir behaupten, dass $t_1 = d(p, q)$. (Dann folgt aus der Definition $d(\gamma(d(p,q)), q) = 0$, d.h. $\gamma(d(p,q)) = q$.)

Andernfalls ist $p_1 := \gamma(t_1) \neq q$ und es existiert ein τ_1 mit $0 < \tau_1 < \min\{\rho_{p_1}, d(p_1, q)\}$. Wie oben finden wir dann ein $m_1 \in S_{\tau_1}(p_1)$ mit $d(p_1, q) = \tau_1 + d(m_1, q)$.

Beh. 2: $d(p, m_1) = t_1 + \tau_1$



Bew.: Es gilt $d(p, q) = t_1 + d(p_1, q) = t_1 + \tau_1 + d(m_1, q)$. Dann folgt aus der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} d(p, m_1) &\leq d(p, p_1) + d(p_1, m_1) = t_1 + \tau_1 = d(p, q) - d(m_1, q) \\ &\leq d(p, m_1) + d(m_1, q) - d(m_1, q) \\ &= d(p, m_1) \end{aligned} \quad (8.83)$$

dass überall Gleichheit gilt, und daraus direkt die Behauptung. □_{Beh. 2}

Aus Beh. 2 folgt, dass die Zusammensetzung von $\gamma|_{[0,t_1]}$ mit der radialen Geodäte von p_1 nach m_1 längenminimierend von p nach m_1 ist, und daher gemäss 8.31

§9. KRÜMMUNG

nach Umparametrisierung eine Geodäte ist, welche aber wegen der Eindeutigkeit mit $\gamma|_{[0, t_1 + \tau_1]}$ übereinstimmen muss. Aus $d(p, q) = t_1 + \tau_1 + d(\gamma(t_1 + \tau_1), q)$ folgt $t_1 + \tau_1 \in \mathbb{T} \leq t_1$, was absurd ist. \square

Beweis von 8.32. (HB) \Rightarrow (MV): Dies ist gerade die Aussage von 8.33 (iii).

(MV) \Rightarrow (GV): Angenommen, für ein $(p, v) \in TM$ ist $b := \sup I_{(p, v)} < \infty$, oBdA mit $\langle v, v \rangle = 1$, d.h. $\gamma := \gamma_{(p, v)}$ ist eine unvollständige nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte, sodaß $d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq L(\gamma|_{[s, t]}) = |t - s| \forall s \leq t$ in $I_{(p, v)}$.

· Ist dann $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, b)$ mit $t_i \rightarrow b$, so folgt aus $d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq |t_i - t_j|$, dass $(\gamma(t_i))$ eine Cauchy-Folge ist.

· Wegen der metrischen Vollständigkeit (und 8.27) existiert dann $q := \lim \gamma(t_i)$. Ist (s_j) eine andere Folge mit $s_j \rightarrow b$, so gilt $\forall j, i: d(\gamma(s_j), q) \leq |s_j - t_i| + d(\gamma(t_i), q) \rightarrow |s_j - b|$ für $i \rightarrow \infty$, d.h. auch $\lim \gamma(s_j) = q$.

· Es folgt also, dass $q = \lim_{t \uparrow b} \gamma(t)$, und daher ist nach 8.34 γ als Geodäte über b hinaus fortsetzbar, im Widerspruch zur Definition von $I_{(p, v)}$.

· Der Beweis von $\inf I_{(p, v)} = -\infty$ geht natürlich ganz genauso.

(GV) \Rightarrow (GV₁): trivial (wähle $p \in M$ beliebig).

(GV₁) \Rightarrow (HB): Sei $A \subset M$ abgeschlossen und beschränkt, und $p \in M$ so, dass Exp_p auf ganz $T_p M$ definiert ist. Dann existiert nach Lemma 8.35 $\forall q \in A$ ein $v_q \in T_p M$ mit $\text{Exp}_p(v_q) = q$ und $\langle v_q, v_q \rangle^{1/2} = d(p, q)$. Da A beschränkt ist, existiert ein $R > 0$ so, dass $\{v_q \mid q \in A\} \subset \overline{B_R(0)} \subset T_p M$. (Es ist nicht unbedingt $R < \rho_p$!) Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist $\text{Exp}_p(\overline{B_R(0)}) \subset M$ kompakt. Also ist

$$A = \text{Exp}_p(\{v_q \mid q \in A\}) \subset \text{Exp}_p(\overline{B_R(0)}) \quad (8.84)$$

als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums ebenfalls kompakt.

(HR): Folgt trivialerweise aus (GV) und dem Lemma 8.35. \square

§9 Krümmung

Wir geben zur Wiedereinstimmung eine geometrische Interpretation der **Torsion** eines affinen Zusammenhangs, definiert in 7.16. Der Einfachheit halber sei $\tilde{\nabla}$ ein metrischer Zusammenhang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , dessen Torsion $T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$ genau den Unterschied zu dem gewöhnlichen Levi-Civita-Zusammenhang ∇ angibt, d.h.

$$\tilde{\nabla} - \nabla = \frac{1}{2} T \quad (9.1)$$

[Gemäss Übungsaufgabe gilt ohne diese Annahme $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} [g(T(X, Y), Z) - g(T(X, Z), Y) - g(T(Y, Z), X)] \quad (9.2)$$

d.h. obwohl allgemein der (in X, Y) anti-symmetrische Teil des Zusammenhangs gleich der Torsion ist, ist der symmetrische Teil eines metrischen Zusammenhangs noch nicht gleich dem Levi-Civita-Zusammenhang (sog. Kontorsion).]

· Für die Zusammenhangskoeffizienten $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ von $\tilde{\nabla}$ bedeutet (9.1)

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}T_{jk}^i \quad (9.3)$$

Aus der Metrizität von $\tilde{\nabla}$ folgt dann, dass

$$T_{jki} = g_{il}T_{jk}^l = -T_{jik} = -T_{kji} \quad (9.4)$$

total antisymmetrisch ist. Insbesondere fällt die Torsion aus der Geodätengleichung heraus:

$$\ddot{x}^i + \tilde{\Gamma}_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \quad (9.5)$$

[Tatsächlich ist (9.1) äquivalent dazu, dass $\tilde{\nabla}$ und ∇ die gleichen Geodäten haben, falls man Geodäten als selbst-parallele Kurven definiert. Die Variation von Länge/Energie hingegen führt auf die Gleichung $g(\tilde{\nabla}_t \dot{\gamma}, X) + g(T(\dot{\gamma}, X), \dot{\gamma}) = 0$ für alle eigentlichen Variationsfelder $X \in \mathfrak{X}_0^{(\gamma)}(M)$. Deren Lösungen fallen dann wegen (9.2) wieder stets mit den Geodäten des Levi-Civita-Zusammenhangs zusammen.]

· In Riemannschen Normalkoordinaten (wegen dem eben Gesagten unabhängig von T) gilt dann anstelle von (8.40)

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i(p) = \frac{1}{2}T_{jk}^i(p) \quad \text{d.h.} \quad \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \xi^j}} \frac{\partial}{\partial \xi^k}(p) = \frac{1}{2}T_{jk}^i(p) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (9.6)$$

Die Torsion misst also (in erster Ordnung an jedem Punkt) die Nichtparallelität des durch Tangentialvektoren von Geodäten aufgespannten Riemannschen Normalrahmens.

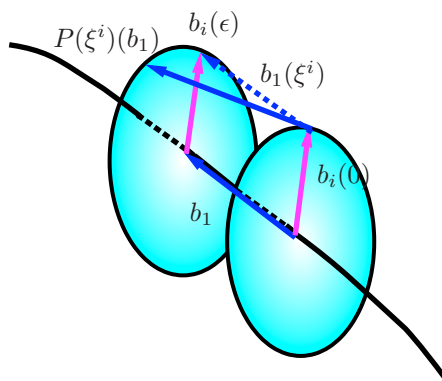
· Für eine fortgesetzte Beschreibung sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Geodäte und $(b_1, \dots, b_n)(t)$ mit $b_1 = \dot{\gamma}$ eine $\tilde{\nabla}$ -parallel transportierte Orthonormalbasis von $T_{\gamma(t)}M$, d.h. ein paralleler Orthonormalrahmen von $\gamma^*(TM)$ (physikalisch: das Inertialsystem eines Beobachters auf der Weltlinie γ). Dann ist $I \times \mathbb{R}^{n-1} \ni (\xi^1 := t, \xi^2, \dots, \xi^n) \mapsto \text{Exp}_{\gamma(t)}(\sum_{i=2}^n \xi^i b_i) \in M$ ein lokaler Diffeomorphismus, definiert also in einer Umgebung von $\gamma(t)$ lokale Koordinaten $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ auf M . Aus $\tilde{\nabla}_t b_i = 0$ und $[\partial_i, \partial_j] = 0$ folgt entlang von γ

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \xi^i}} \frac{\partial}{\partial \xi^1}(\gamma(t)) = T(\partial_i, \partial_1)(\gamma(t)) \quad (9.7)$$

· $T \neq 0$ bedeutet also, dass der in Richtung $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ parallel herausgeschobene Geschwindigkeitsvektor $\frac{\partial}{\partial t}$, in erster Ordnung

$$P(\xi^i) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} - \xi^i T_{i1}^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (9.8)$$

nicht in Richtung des entlang $\gamma(t)$ parallel verschobenen Vektor $b_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ zeigt. Wegen (9.4) und $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ ist $T_{i1}^j = -T_{1j}^i$, die Torsion beschreibt also eine Rotation des Rahmens (b_2, \dots, b_n) von $\gamma^*(TM)$ entlang von γ .



§9. KRÜMMUNG

Unabhängig von der Interpretation beleuchten diese Überlegungen die wichtige Bedeutung von Tensoren als lokale geometrische Invarianten, deren Nichtverschwinden die Wahl von lokalen Koordinaten/Trivialisierungen mit bestimmten Eigenschaften unmöglich macht. In zweiter Ordnung der Taylor-Entwicklung der Metrik entdeckte Riemann auf diese Weise seinen berühmten Krümmungstensor.

Krümmung und Parallelverschiebung

Definition 9.1. Sei $E \rightarrow M$ ein differenzierbares Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ . Dann ist die Abbildung $F_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$,

$$F_\nabla(X, Y, \sigma) = F_\nabla(X, Y)\sigma := \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma \quad (9.9)$$

$\mathcal{F}(M)$ -linear in allen drei Argumenten, und anti-symmetrisch in den beiden ersten, d.h. es gilt $F_\nabla(X, Y)\sigma = -F_\nabla(Y, X)\sigma$. F_∇ heisst Krümmung von ∇ .

Begründung. \mathbb{R} -Linearität in allen drei Argumenten ist klar, ebenso die Anti-Symmetrie. Es genügt also, $\mathcal{F}(M)$ -Linearität in X und σ zu prüfen. Für $f \in \mathcal{F}(M)$ ist

$$\begin{aligned} & \nabla_{fX} \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_{fX} \sigma - \nabla_{[fX, Y]}\sigma \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma) - Y(f) \nabla_X \sigma - \underbrace{\nabla_{-Y(f)X} \sigma}_{=-Y(f) \nabla_X \sigma} \end{aligned} \quad (9.10)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

($\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ -linear in X) und

$$\begin{aligned} & \nabla_X \nabla_Y (f\sigma) - \nabla_Y \nabla_X (f\sigma) - \nabla_{[X, Y]}(f\sigma) \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma) \\ & \quad + Y(f) \nabla_X \sigma + X(f) \nabla_Y \sigma - X(f) \nabla_Y \sigma - Y(f) \nabla_X \sigma \\ & \quad + \underbrace{X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f)}_{=0} \end{aligned} \quad (9.11)$$

($\Rightarrow \mathcal{F}(M)$ -linear in σ). □

Bemerkungen. · Als $\mathcal{F}(M)$ -lineare alternierende Abbildung $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(\text{End}(E))$ aufgefasst heisst F_∇ auch Krümmungsform (eine $\text{End}(E)$ -wertige zwei-Form). Im Gegensatz dazu sind die Zusammenhangs-Einsformen 7.8 nur bezüglich eines lokalen Rahmens definiert!

· Aus der Definition ist klar, dass $F_\nabla(X, Y)\sigma$ in jedem Punkt $p \in M$ nur von X, Y, σ in einer kleinen Umgebung von p abhängt. Aus der $\mathcal{F}(M)$ -Linearität folgt, dass nur ihre Werte in p eingehen (vgl. 7.7). M.a.W., für $v, w \in T_p M$ ist $F_\nabla(v, w)\sigma_p = F_\nabla(X, Y)\sigma(p)$ unabhängig von der zur Berechnung eingesetzten lokalen Fortsetzung von v, w, σ_p .

· Die Krümmung misst die Nicht-Kommutativität der kovarianten Ableitung als Erzeugerin des Paralleltransports, s. 7.12. Sie tritt auf natürliche Weise erstmals für zwei-dimensionale Proben auf: Für $p \in M$ fest und $v, w \in T_p M$ linear unabhängig sei mit $(0, 0) \in I \times J \subset \mathbb{R}^2$ offen $\beta : I \times J \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung mit

$\beta(0, 0) = p$, $\partial_x \beta(0, 0) = v$ und $\partial_y \beta(0, 0) = w$. Für $y \in J$ fest sei $P_y(x) : E_{\beta(0,y)} \rightarrow E_{\beta(x,y)}$ der Paralleltransport (s. (7.11)) entlang $x \mapsto \beta(x, y)$, und für $x \in I$ fest sei $Q_x(y) : E_{\beta(x,0)} \rightarrow E_{\beta(x,y)}$ der Paralleltransport entlang $y \mapsto \beta(x, y)$. Dann gilt (mit Unterdrückung des Rückzugs) für $\sigma \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} \nabla_w \nabla_{\partial_x \beta(0,\cdot)} \sigma(p) &= \frac{d}{dy} \Big|_0 \frac{d}{dx} \Big|_0 (Q_0(y)^{-1} P_y(x)^{-1} \sigma(\beta(x, y))) \\ \nabla_v \nabla_{\partial_y \beta(\cdot,0)} \sigma(p) &= \frac{d}{dx} \Big|_0 \frac{d}{dy} \Big|_0 (P_0(x)^{-1} Q_x(y)^{-1} \sigma(\beta(x, y))) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} F_{\nabla}(v, w) \sigma_p &= \frac{d}{dy} \Big|_0 \frac{d}{dx} \Big|_0 (P_0(x)^{-1} Q_x(y)^{-1} - Q_0(y)^{-1} P_y(x)^{-1}) \sigma(\beta(x, y)) \\ &= \frac{d}{dy} \Big|_0 \frac{d}{dx} \Big|_0 (P_0(x)^{-1} Q_x(y)^{-1} P_y(x) Q_0(y) - \text{id}_{E_p}) Q_0(y)^{-1} P_y(x)^{-1} \sigma(\beta(x, y)) \\ &= \frac{d}{dy} \Big|_0 \frac{d}{dx} \Big|_0 (\Pi(x, y) - \text{id}_{E_p}) \sigma_p \end{aligned} \quad (9.13)$$

wobei $\Pi(x, y) = P_0(x)^{-1} Q_x(y)^{-1} P_y(x) Q_0(y) : E_p \rightarrow E_p$ der Paralleltransport entlang eines geschlossenen Quadratzuges in der (x, y) -Ebene ist, und wir im letzten Schritt benutzt haben, dass

$$\begin{aligned} \Pi(x, 0) &= \Pi(0, y) = \text{id}_{E_p} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \Big|_0 \Pi(x, y) &= \frac{d}{dx} \Big|_0 \lim_{y \rightarrow 0} \Pi(x, y) = \frac{d}{dx} \Big|_0 \text{id}_{E_p} = 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

(D.h. nur die zweite Ableitung des ersten Faktors in der letzten Zeile von (9.13) trägt bei.) Man schreibt (9.13) auch (nicht ganz korrekt) als

$$F_{\nabla}(v, w) = \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\Pi(x, y) - \text{id}_p}{xy} \quad (9.15)$$

Definition 9.2. Für einen geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ($\gamma(a) = \gamma(b) = p$), heisst der Paralleltransport $\text{Hol}(\gamma) := P_{pp}^{(\gamma)} : E_p \rightarrow E_p$ die Holonomie von ∇ entlang von γ . (Wir unterdrücken hier die Abhängigkeit vom gewählten Startpunkt. Ist $q = \gamma(c)$ ($c \in [a, b]$), so ändert sich die Holonomie durch Konjugation mit dem Paralleltransport von p nach q , $P_{qq} = P_{qp} P_{pp} P_{pq}$.)

· Für eine Variante der Interpretation (9.15) sei für kleines $|s|$ $H_s : E_p \rightarrow E_p$ die Holonomie von ∇ entlang des geschlossenen Weges

$$\gamma_s : [0, 1] \ni t \mapsto \begin{cases} \beta(4ts, 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(s, (4t-1)s) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(s(3-4t), s) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \beta(0, 4s(1-t)) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (9.16)$$

§9. KRÜMMUNG

Proposition 9.3. *Es gilt: $\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} H_s = -2F_\nabla(v, w)$*

Beweis. (Wir benutzen wie auch schon zuvor, dass die Differenzierbarkeit von Paralleltransporten wie H_s nach allfälligen Parametern allgemein geklärt ist.)

· Zur Berechnung der Ableitung sei $\sigma_p \in E_p$ fest und $\sigma_s : [0, 1] \ni t \rightarrow \sigma_s(t) \in E_{\gamma_s(t)}$ der ∇ -parallele Schnitt entlang γ_s mit $\sigma_s(0) = \sigma_p$. Insbesondere gilt $H_s(\sigma_p) = \sigma_s(1)$.

· Weiter sei $R_s(t) : E_{\gamma_s(t)} \rightarrow E_p$ der Paralleltransport entlang des “Restweges”, $\gamma_s|_{[t,1]}$, von $\gamma_s(t)$ nach p .

· Dann ist die Abbildung $(s, t) \mapsto \sigma_s(t)$ ein Schnitt von E entlang $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ und wegen $\frac{d}{ds}\gamma_s(0) = \frac{d}{ds}\gamma_s(1) = 0$ gilt (vgl. (7.22))

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\sigma_s(1) &= \nabla_{\partial_s}\sigma_s(1) - \underbrace{\frac{d}{ds}\sigma_s(0)}_{=0} = \underbrace{R_s(1)}_{=\text{id}} \nabla_{\partial_s}\sigma_s(1) - R_s(0) \nabla_{\partial_s}\sigma_s(0) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} R_s(t) \nabla_{\partial_s}\sigma_s(t) dt = (\text{vgl. (7.12)}) = \int_0^1 R_s(t) \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s}\sigma_s(t) dt \end{aligned} \quad (9.17)$$

Unter Benutzung von (9.1) mit $F_{\gamma^*(\nabla)} = \gamma^*(F_\nabla)$, $[\partial_t, \partial_s] = 0$ sowie $\nabla_{\partial_t}\sigma_s(t) = 0$, $\sigma_s(t) = R_s(t)^{-1}\sigma_s(1)$ und $\sigma_s(1) = H_s\sigma_p$ können wir dies auch schreiben als

$$\frac{d}{ds}H_s = \left[\int_0^1 R_s(t) \circ F_\nabla(\partial_t\gamma, \partial_s\gamma) \circ R_s(t)^{-1} dt \right] H_s \quad (9.18)$$

Nun ist wegen (9.16)

$$(\partial_s\gamma, \partial_t\gamma) = \begin{cases} (4t\partial_x\beta, 4s\partial_x\beta) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ (\partial_x\beta + (4t-1)\partial_y\beta, 4s\partial_y\beta) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((3-4t)\partial_x\beta + \partial_y\beta, -4s\partial_x\beta) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ (4(1-t)\partial_y\beta, -4s\partial_y\beta) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (9.19)$$

Aus Linearität und Antisymmetrie von F_∇ folgt

$$F_\nabla(\partial_t\gamma, \partial_s\gamma) = \begin{cases} 4sF_\nabla(\partial_y\beta, \partial_x\beta) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.20)$$

Damit konvergiert jedenfalls das Integral in (9.18) für $s \rightarrow 0$ gegen 0, es gilt also (beachte auch: $H_0 = \text{id}$)

$$\frac{d}{ds}\Big|_0 H_s = 0 \quad (9.21)$$

Damit (und unter Benutzung von Stetigkeit und $H_0 = \text{id}$) ist die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{ds^2}H_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 4sR_s(t) \circ F_\nabla(\partial_y\beta, \partial_x\beta) \circ R_s(t)^{-1} dt \right] H_s = 2F_\nabla(w, v) \quad (9.22)$$

□

Korollar 9.4. *Ein Vektorbündel mit Zusammenhang lässt sich genau dann lokal durch parallele Schnitte trivialisieren, wenn $F_\nabla = 0$. Man nennt einen solchen Zusammenhang auch “flach”.*

Beweis. \Leftarrow ist klar. Für die direkte Implikation sei $p \in M$ und (U, φ) eine in p zentrierte Kartenumgebung mit der Eigenschaft, dass $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ quaderförmig ist. Sei (e_1, \dots, e_r) eine Basis von E_p und für $q \in U$ $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)(q)$ der entlang der Koordinatenachsen in der alphabetischen Reihenfolge transportierte parallele Rahmen, d.h. also $\forall a = 1, \dots, r$:

$$\sigma_a(x^1, \dots, x^n) := P_{(x^1, \dots, x^{n-1})}(x^n) \circ \dots \circ P_{(0, \dots, 0)}(x^1)(e_a) \quad (9.23)$$

Dann folgt (induktiv in der Anzahl nicht verschwindender Koordinaten¹⁴) aus $[\partial_i, \partial_j] = 0$ und $[\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] = 0$, dass $\nabla_{\partial_i} \sigma_a = \forall i, a$ und auf ganz U . \square

Lemma 9.5. *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und ∇ ein metrischer affiner Zusammenhang, so erfüllt der zugehörige Krümmungstensor ausserdem $\forall X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(M)$*

$$g(F_{\nabla}(X, Y)U, V) + g(F_{\nabla}(X, Y)V, U) = 0 \quad (9.24)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} g(F_{\nabla}(X, Y)U, V) &= g(\nabla_X \nabla_Y U, V) - g(\nabla_Y \nabla_X U, V) - g(\nabla_{[X, Y]} U, V) \\ &= Xg(\nabla_Y U, V) - g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - Yg(\nabla_X U, V) + g(\nabla_X U, \nabla_Y V) \\ &\quad - [X, Y]g(U, V) + g(U, \nabla_{[X, Y]} V) \\ &= XYg(U, V) - YXg(U, V) - [X, Y]g(U, V) \\ &\quad + g(U, \nabla_Y \nabla_X V) - g(U, \nabla_X \nabla_Y V) - g(U, \nabla_{[Y, X]} V) \\ &= g(U, F_{\nabla}(Y, X)V) \end{aligned} \quad (9.25)$$

\square

Definition 9.6. Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heisst die Krümmung des Levi-Civita-Zusammenhangs Riemannscher Krümmungstensor, unmittelbar aufzufassen als Tensorfeld vom Typ $(1, 3)$:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ R(X, Y)Z &:= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (9.26)$$

Den metrisch äquivalenten Tensor vom Typ $(0, 4)$

$$R^b(X, Y, U, V) := g(R(X, Y)U, V) \quad (9.27)$$

nennen wir Riemannsche Krümmungsform. (Meistens wird hier allerdings in Sprache und Notation nicht unterschieden.)

Proposition 9.7. $\forall X, Y, Z, U, V \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (Erste Bianchi-Identität)
- (3) $g(R(X, Y)U, V) = -g(R(X, Y)V, U)$
- (4) $g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)$ (Paar-Symmetrie)

¹⁴Beispiel: Aus $\nabla_{\partial_2} \sigma_a = 0$ auf $\{x^3 = \dots = x^n = 0\}$ und $[\nabla_{\partial_2}, \nabla_{\partial_1}] = 0$ folgt $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} \sigma_a = \nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} \sigma_a = 0$ auf dieser Menge, und daher wegen $\nabla_{\partial_1} \sigma_a = 0$ auf $\{x^2 = \dots = x^n = 0\}$, dass $\nabla_{\partial_1} \sigma_a = 0$ auf ganz $\{x^3 = \dots = x^n = 0\}$.

§9. KRÜMMUNG

Beweis. (1) ist Teil der Def. 9.1, (3) ist in 9.5. (2) folgt aus der Torsionsfreiheit,

$$\begin{aligned}
 & \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\
 & + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
 & + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y,Z]} X \\
 & \qquad \qquad \qquad + \nabla_Y [Z, X] - \nabla_{[Z,X]} Y \\
 & \qquad \qquad \qquad + \nabla_Z [X, Y] - \nabla_{[X,Y]} Z \\
 & = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

wegen der Jacobi-Identität aus 5.14. Zuletzt folgt (4) aus der Kombination von (1)–(3):

$$\begin{aligned}
 & g(R(X, Y)U, V) \stackrel{(2)}{=} -g(R(Y, U)X, V) - g(R(U, X)Y, V) \\
 & \qquad \qquad \qquad \stackrel{(3)}{=} g(R(Y, U)V, X) + g(R(U, X)V, Y) \\
 & \stackrel{(2)}{=} -g(R(U, V)Y, X) - g(R(V, Y)U, X) - g(R(X, V)U, Y) - g(R(V, U)X, Y) \\
 & \qquad \qquad \qquad \stackrel{(1),(2),(3)}{=} 2g(R(U, V)X, Y) - g(R(Y, X)V, U) \\
 & \Rightarrow g(R(X, Y)U, V) = g(R(U, V)X, Y)
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

□

· In lokalen Koordinaten lassen sich die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors durch Christoffel-Symbole und deren Ableitungen ausdrücken, und mit (7.41) dann zuletzt durch zweite Ableitungen der Komponenten des metrischen Tensors. Ich finde die folgende (nicht ganz standard) Konvention für die Reihenfolge der Indizes am natürlichsten (Beachte hier wieder $[\partial_i, \partial_j] = 0$):

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l \tag{9.30}$$

Dann folgt aus $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$:

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \tag{9.31}$$

Für die Komponenten der Krümmungsform gilt

$$R_{ijkl} = g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} = -R_{jkil} - R_{kijl} \tag{9.32}$$

Achtung: Es herrscht in der Literatur keine Einigkeit über die Reihenfolge der Indizes, selbst wenn für das Vorzeichen des Krümmungstensors tatsächlich (9.26) am weitesten verbreitet scheint.

· In Riemannschen Normalkoordinaten (ξ^1, \dots, ξ^n) um p folgt aus (8.40) für (7.41) in p

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{ijk}(p) := g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})(p) = 0 \\
 & \Rightarrow g_{jk,i}(p) = \Gamma_{ijk}(p) + \Gamma_{ikj}(p) = 0 \quad \forall j, k, i
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

und daraus mit (9.31) ($g_{ij,kl} := \partial_k \partial_l g_{ij}(p)$ etc.)

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(p) &= \partial_i \Gamma_{jkl} - \partial_j \Gamma_{ikl} \\ &= \frac{1}{2} (g_{jl,ki} + g_{kl,ji} - g_{jk,li} - g_{il,kj} - g_{kl,ij} + g_{ik,lj}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{jl,ki} + g_{ki,jl} - g_{il,jk} - g_{jk,il}) \end{aligned} \quad (9.34)$$

woraus auch die Symmetrien (9.32) unmittelbar ersichtlich sind.

· Andererseits folgt aus der Geodätengleichung in Normalkoordinaten (8.43) durch Ableiten nach t

$$\partial_l \Gamma_{jk}^i(p) v^j v^k v^l = 0 \quad (9.35)$$

$\forall v \in T_0 T_p M$. Es verschwindet also der in l, j, k total symmetrische Teil von $\partial_l \Gamma_{jk}^i(p)$, d.h. mit (7.41), (7.42) und (9.33)

$$\begin{aligned} g_{ij,kl} + g_{ik,jl} - g_{jk,il} + g_{il,kj} + g_{ik,jl} - g_{lk,ij} + g_{ij,kl} + g_{il,kj} - g_{jl,ik} &= 0 \\ \Rightarrow 2(g_{ij,kl} + g_{il,kj} + g_{ik,jl}) = g_{kl,ij} + g_{kj,il} + g_{jl,ik} = \frac{1}{2} (g_{ij,kl} + g_{il,kj} + g_{ik,jl}) &= 0 \end{aligned} \quad (9.36)$$

$\forall i, j, k, l$. Die zyklische Summe über je drei der Indizes von $g_{ij,kl}$ gibt also Null. Durch wiederholte Anwendung und Symmetrie der zweiten Ableitung folgt hieraus:

$$\begin{aligned} g_{kl,ij} \stackrel{i \text{ fest}}{=} -g_{kj,il} - g_{jl,ik} \stackrel{k}{=} -g_{kj,il} + g_{ji,lk} + g_{li,jk} \\ \stackrel{j}{=} g_{ij,kl} - g_{kj,il} - g_{ki,jl} - g_{kl,ji} \stackrel{l}{=} 2g_{ij,kl} - g_{kl,ij} \end{aligned} \quad (9.37)$$

$$\Rightarrow g_{ij,kl} = g_{kl,ij} \quad (9.38)$$

Mit (9.36) und (9.38) in (9.34) ergibt dies:

$$R_{ijkl}(p) + R_{kjil}(p) = 2g_{jl,ik} - g_{il,jk} - g_{lk,ij} = 3g_{jl,ik} \quad (9.39)$$

Wir haben damit gezeigt, dass der Riemannsche Krümmungstensor die lokale Abweichung des metrischen Tensors vom euklidischen Standardprodukt auf $T_p M$ in zweiter Ordnung kodiert:

Proposition 9.8. *Die Taylornäherung der Komponenten des metrischen Tensors in Normalkoordinaten hat die Form*

$$g_{jl}(\xi) = \delta_{jl} + \frac{1}{3} R_{ijkl}(p) \xi^i \xi^k + \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad (9.40)$$

□

Proposition 9.9. *Die kovariante Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors erfüllt die sog. zweite Bianchi-Identität,*

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0 \quad (9.41)$$

(Wegen $\nabla g = 0$ ist diese Aussage äquivalent zur Identität

$$(\nabla_X R^b)(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y R^b)(Z, X, U, V) + (\nabla_Z R^b)(X, Y, U, V) = 0 \quad (9.42)$$

für die metrisch äquivalente Krümmungsform.)

§9. KRÜMMUNG

Beweis. In den Übungen wird die Bianchi-Identität für die Krümmung eines allgemeinen Zusammenhangs untersucht. Wir benutzen hier zur Vereinfachung, dass die kovariante Ableitung eines Tensors wieder ein Tensor ist, d.h. die linke Seite in (9.41) hängt an jedem Punkt $p \in M$ nur von den Werten $(X_p, Y_p, Z_p) \in T_p M$ an diesem Punkt ab. Sind die (allenfalls anderen) Fortsetzungen X, Y, Z so gewählt, dass sie in Normalkoordinaten um p konstante Koeffizienten haben, so gilt

$$\begin{aligned} \text{lokal: } & [X, Y] = [Y, Z] = [Z, X] = 0 \\ \text{und wegen (8.40) in } p: & \nabla_X Y = \nabla_Y Z = \nabla_Z X = 0 \end{aligned} \quad (9.43)$$

und daher (vgl. 6.12 und 6.13)

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(Y, Z)U &= \nabla_X(R(Y, Z)U) - R(\underbrace{\nabla_X Y}_{|_p=0}, Z)U - R(Y, \underbrace{\nabla_X Z}_{|_p=0})U - R(Y, Z)\nabla_X U \\ (\text{in } p) &= \nabla_X[\nabla_Y, \nabla_Z]U - [\nabla_Y, \nabla_Z]\nabla_X U \\ &= [\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]]U \end{aligned} \quad (9.44)$$

Die Summe über zyklische Permutationen von X, Y, Z verschwindet dann wegen der Jacobi-Identität für Tensorableitungen,

$$[\nabla_X, [\nabla_Y, \nabla_Z]] + [\nabla_Y, [\nabla_Z, \nabla_X]] + [\nabla_Z, [\nabla_X, \nabla_Y]] = 0 \quad (9.45)$$

□

Theorem 9.10. (i) *Der Riemannsche Krümmungstensor ist invariant unter lokalen Isometrien, d.h. ist $\Phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ eine lokale Isometrie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, so gilt $\Phi_*(R(X, Y)Z) = S(\Phi_*X, \Phi_*Y)(\Phi_*Z)$. (Hier ist für $q \in N$ $\Phi_*X(q) := D\Phi_{\Phi^{-1}(q)}X_{\Phi^{-1}(q)}$ für einen lokalen Schnitt Φ^{-1} von Φ , und S ist der Krümmungstensor von (N, h) .)*

(ii) *Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann lokal isometrisch zu \mathbb{R}^n mit der euklidischen Standardmetrik, wenn $R = 0$.*

Beweis. (i) folgt aus der Tatsache, dass R vollständig durch die Metrik und ihre Ableitungen bestimmt ist¹⁵, sowie $\Phi^*(\tilde{g}) = g$.

(ii) Ist M lokal isometrisch zu \mathbb{R}^n , so folgt $R = 0$ direkt aus (i). Für die andere Richtung sei $p \in M$, (b_1, \dots, b_n) eine ONB von $(T_p M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und (X_1, \dots, X_n) lokal parallele Schnitte mit $X_{ip} = b_i$ wie in 9.4. Dann folgt aus der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs, dass

$$[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0 \quad (9.46)$$

und damit aus 5.16 die Existenz von lokalen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) mit $X_i = \partial_i$. Aus der Metrizität des Zusammenhangs folgt $g(X_i, X_j) = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$, d.h. die Koordinaten geben eine lokale Isometrie mit $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. □

¹⁵Umgekehrt bestimmt die Krümmung die Metrik “generisch” für Dimension ≥ 4 , s. Kulkarni, “Curvature and metric” (1970) und Yau (1974)

Gauss- und Schnittkrümmung

Vor einer weiteren Charakterisierung des Riemannschen Krümmungstensors wiederholen wir etwas formlos einige Begriffe aus der elementaren Differentialgeometrie von ein- und zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des euklidischen $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

· Es sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve. Dann ist

$$\mathbf{t} := \dot{\gamma} \in \Gamma(\gamma^*(T\mathbb{R}^3)) \quad (9.47)$$

ein Einheitsvektorfeld entlang γ , erfüllt also $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$.

· Daraus folgt zunächst

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 2 \langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle \quad (9.48)$$

wobei $\dot{\mathbf{t}}$ die “gewöhnliche” Ableitung ist, formal gesehen der Rückzug des trivialen Zusammenhangs auf $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ via γ . Die Beschleunigung ist also orthogonal zur Geschwindigkeit. Man nennt

$$k := \langle \dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{t}} \rangle^{1/2} \quad (9.49)$$

die Krümmung der Kurve.

· Ausserhalb der Wendestellen, d.h. für $k \neq 0$ ($\Leftrightarrow \dot{\mathbf{t}} \neq 0$) ist k eine differenzierbare Funktion auf I , und der Normalenvektor

$$\mathbf{n} := \frac{\dot{\mathbf{t}}}{k} \in \Gamma(\gamma^*(T\mathbb{R}^3)) \quad (9.50)$$

sowie der Binormalenvektor

$$\mathbf{b} := \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (9.51)$$

(dessen Definition über das Kreuzprodukt von einer Orientierung des \mathbb{R}^3 abhängt) sind Einheitsvektorfelder entlang γ . Man nennt das Tripel $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ begleitendes Dreibein, ein orthonormaler, aber nicht paralleler, lokaler Rahmen von $\gamma^*(T\mathbb{R}^3)$. Die von \mathbf{t} und \mathbf{n} aufgespannte Ebene im \mathbb{R}^3 heisst Schmiegebene.

· Wegen $\dot{\mathbf{n}} \perp \mathbf{n}$ und $\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = -k$ folgt

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + w\mathbf{b} \quad (9.52)$$

für eine differenzierbare Funktion $w \in \mathcal{F}(I)$, genannt die Windung (Torsion) der Kurve. Schliesslich folgt

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (-k\mathbf{t} + w\mathbf{b}) = -w\mathbf{b} \times \mathbf{t} = -w\mathbf{n} \quad (9.53)$$

(9.52) und (9.53) heissen Frenetsche Formeln.

· Sei nun $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\beta : U \ni (u, v) \mapsto y(u, v) \in \mathbb{R}^3$ eine reguläre (lokale) Parametrisierung einer zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Wie in ($\frac{13}{2}$.6) wird der Tangentialraum in jedem Punkt von $\partial_u y$ und $\partial_v y$ aufgespannt, und die Einschränkung der euklidischen Metrik auf $T\Sigma$ heisst “erste Fundamentalform”, in traditioneller Notation: (d.h. $E = g(\partial_u, \partial_u) = \langle \partial_u y, \partial_u y \rangle$ etc.)

$$g = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (9.54)$$

§9. KRÜMMUNG

· Das orthogonale Komplement zum Tangentialraum wird (in jedem Punkt) aufgespannt vom Normalenvektor

$$\mathfrak{N} := \frac{\partial_u y \times \partial_v y}{\|\partial_u y \times \partial_v y\|} \in \Gamma(\beta^*(T\mathbb{R}^3)) \quad (9.55)$$

Er/sein Vorzeichen hängt offenbar von der Orientierung von \mathbb{R}^3 sowie der durch die Parametrisierung gegebenen lokalen Orientierung von Σ ab. $\mathfrak{N} : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ heisst Gauss-Abbildung.

· Wegen $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N} \rangle = 1$ gilt wieder $\langle D\mathfrak{N}, \mathfrak{N} \rangle = 0$, d.h. $D\mathfrak{N}_p(v) \in T_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \quad \forall v \in T_p\Sigma$.

$$- D\mathfrak{N} \in \Gamma(T\Sigma^\vee \otimes T\Sigma) = \Gamma(\text{End}(T\Sigma)) \quad (9.56)$$

heisst Weingarten-Abbildung oder Formoperator.

· Die metrisch äquivalente kovariante zwei-Form, $h := -D\mathfrak{N}^\flat$ heisst zweite Fundamentalform, wegen

$$h(\partial_u, \partial_v) = -\langle \partial_u \mathfrak{N}, \partial_v y \rangle = -\partial_u \underbrace{\langle \mathfrak{N}, \partial_v y \rangle}_{=0} + \langle \mathfrak{N}, \partial_u \partial_v y \rangle \quad (9.57)$$

symmetrisch in den beiden Argumenten. Notation:

$$h = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (9.58)$$

· Die zweite Fundamentalform gibt Auskunft über die Krümmung von differenzierbaren Kurven in Σ : Für $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ mit begleitendem Dreibein $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ wie oben heisst

$$k_n := \langle \dot{\mathbf{t}}, \mathfrak{N} \rangle \quad (9.59)$$

die Normalkrümmung von γ .

Beh.: $k_n = h(\mathbf{t}, \mathbf{t})$.

Bew.: Wegen $\mathbf{t} \in \gamma^*(T\Sigma)$ gilt $\langle \mathfrak{N}, \mathbf{t} \rangle = 0$ entlang von γ und daraus folgt durch Ableiten nach dem Parameter

$$\underbrace{\langle D\mathfrak{N}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \rangle}_{-h(\mathbf{t}, \mathbf{t})} + \langle \mathfrak{N}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = 0 \quad (9.60)$$

unmittelbar die Behauptung. □

· Ausserhalb der Wendestellen gilt $\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, d.h.

$$k_n = k \langle \mathbf{n}, \mathfrak{N} \rangle \quad (9.61)$$

Nach Cauchy-Schwarz gilt also $|k_n| = k$ genau dann, wenn $\mathbf{n} = \pm \mathfrak{N}$, d.h wenn die Schmiegebene ein Normalschnitt von Σ in p ist. Die Normalkrümmung kann im Unterschied zur Krümmung auch negativ sein.

· Die Symmetrie der zweiten Fundamentalform bedeutet, dass die Weingarten-Abbildung (an jedem Punkt $p \in \Sigma$) bezüglich der ersten Fundamentalform selbstadjungiert ist. Daher sind Maximum und Minimum der Normalkrümmung (als Funktion auf dem Einheitskreis in $T_p\Sigma =$ Menge der möglichen Richtungen von nach der Bogenlänge parameterisierten Kurven) gleich den Eigenwerten der Weingarten-Abbildung $-D\mathfrak{N}_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$.

Definition 9.11. Die Eigenwerte k_1, k_2 der Weingarten-Abbildung heissen Hauptkrümmungen der Fläche in p . Die zugehörigen Eigenvektoren geben die Hauptkrümmungsrichtungen. Die Kehrwerte $R_i = k_i^{-1}$ heissen Krümmungsradien.

· Die Determinante der Weingarten-Abbildung,

$$K := \det(-D\mathfrak{N}_p) = k_1 k_2 \quad (9.62)$$

heisst Gaussische Krümmung, und die halbe Spur

$$H := \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{T_p \Sigma}(-D\mathfrak{N}_p) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (9.63)$$

mittlere Krümmung von Σ in p .

Beachte: K ist jedenfalls unabhängig von der Wahl der Orientierungen von \mathbb{R}^3 und Σ , die in die Definition von \mathfrak{N} eingingen.

· Insbesondere machte die wichtige Unterscheidung zwischen positiver $K > 0$ und negativer $K < 0$ Gausscher Krümmung Sinn.

· Ausserdem ist K natürlich unabhängig von der Wahl der Parametrisierung von Σ als Untermanigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . Die wesentliche Einsicht von Gauss war:

Theorem 9.12 (Theorema Egregium). *Die Gaussische Krümmung einer Fläche ist eine intrinsische Invariante, d.h. sie lässt sich vollständig durch die erste Fundamentalform und ihre ersten und zweiten Ableitungen ausdrücken.*

Beweis. Direktes Nachrechnen (Haha), bzw. aus

$$k_1 k_2 = \det(-D\mathfrak{N}_p) = \det(hg^{-1}) = \frac{\det h}{\det g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (9.64)$$

und der folgenden □

Proposition 9.13. *Zwischen Gausscher zweiter Fundamentalform und Riemannischem Krümmungstensor besteht der Beziehung*

$$\det h = LN - M^2 = -g(R(\partial_u, \partial_v)\partial_u, \partial_v) \quad (9.65)$$

Beweis. · Laut ($\frac{13}{2}$.22) ist die kovariante Ableitung entlang von Σ die orthogonale Projektion des Zusammenhangs auf $T\mathbb{R}^3$ auf $T\Sigma$. Wegen $\langle \mathfrak{N}, \mathfrak{N} \rangle = 1$ gilt also (Gauss-Weingarten-Gleichungen)

$$\nabla_{\partial_v} \partial_u y = \partial_v \partial_u y - \langle \partial_v \partial_u y, \mathfrak{N} \rangle \mathfrak{N} = \partial_v \partial_u y - \underbrace{h(\partial_u, \partial_v)}_{=: h_{uv}} \mathfrak{N} \quad (9.66)$$

wegen (9.57).

· Es folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_v} \partial_u, \partial_v) &= \langle \partial_u \nabla_{\partial_v} \partial_u, \partial_v \rangle \\ &= \langle \partial_u \partial_v \partial_u y - (\partial_u h_{uv}) \mathfrak{N} - h_{uv} \partial_u \mathfrak{N}, \partial_v y \rangle \\ &= \langle \partial_u \partial_v \partial_u y, \partial_v y \rangle + h_{uv} h_{uv} \end{aligned} \quad (9.67)$$

§9. KRÜMMUNG

und analog

$$g(\nabla_{\partial_v} \nabla_{\partial_u} \partial_u, \partial_v) = \langle \partial_v \partial_u \partial_u y, \partial_v y \rangle + h_{uu} h_{vv} \quad (9.68)$$

· Wegen der Symmetrie der gewöhnlichen Ableitungen folgt

$$g(R(\partial_u, \partial_v) \partial_u, \partial_v) = g(\nabla_u \nabla_v \partial_u - \nabla_v \nabla_u \partial_u, \partial_v) = h_{uv}^2 - h_{uu} h_{vv} = -\det h \quad (9.69)$$

□

Da der Riemannsche Krümmungstensor vollständig durch g bestimmt ist, folgt aus 9.13 das Theorema Egregium 9.12. Nun sind wir motiviert für

Lemma 9.14. *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $p \in M$. Für zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in T_p M$ hängt die reelle Zahl*

$$\frac{\langle R(v_2, v_1) v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2} \quad (9.70)$$

nur von dem durch v_1, v_2 aufgespannten zwei-dimensionalen Unterraum von $T_p M$ ab (und nicht von der speziellen Basis v_1, v_2).

Beweis. Ist $\tilde{v}_i = v_j B_i^j$ mit $\det B = B_1^1 B_2^2 - (B_2^1)^2 \neq 0$ eine andere Basis von $\text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$ so folgt aus den Symmetrien der Krümmungsform sofort

$$\langle R(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = \det B \langle R(v_2, v_1) \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle = (\det B)^2 \langle R(v_2, v_1) v_1, v_2 \rangle \quad (9.71)$$

Im Nenner von (9.70) steht andererseits gerade die Determinante der darstellenden Matrix $G = (G_{ij})$ von $g|_{\text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)}$ in der Basis b_1, b_2 (und ist daher insbesondere $\neq 0$). Wegen $\tilde{G} = B^T G B$ gilt $\det \tilde{G} = (\det B)^2 \det G$ und mit (9.71) daher

$$\frac{\langle R(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle}{\det \tilde{G}} = \frac{\langle R(v_2, v_1) v_1, v_2 \rangle}{\det G} \quad (9.72)$$

□

Definition 9.15. Die Funktion $K_p : G(2, T_p M) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $K_p(\Pi) := (9.70)$ für eine beliebige Basis (v_1, v_2) von $\Pi \in G(2, T_p M)$ heisst Schnittkrümmung von M in p .

Mit den Überlegungen zu 9.8 folgt: Ist (b_1, b_2) eine ONB von $\Pi \in G(2, T_p M)$, und sind (ξ^1, \dots, ξ^n) Riemannsche Normalkoordinaten um p mit $\partial_i = b_i$ für $i = 1, 2$, so gilt

$$K_p(\Pi) = -R_{1212}(p) = -\frac{1}{6} g_{11,22} = -\frac{1}{6} g_{22,11} \quad (9.73)$$

Insbesondere ist $K_p(\Pi)$ die ‘‘Gaussche Krümmung’’¹⁶ in p einer zwei-dimensionalen Untermannigfaltigkeit der Form $\Sigma = \text{Exp}_p(U) \subset M$ für eine geeignete Nullumgebung $U \subset \Pi \subset T_p M$.¹⁷ Erstaunlicherweise bestimmt die Schnittkrümmung die Riemannsche Krümmungsform vollständig.

¹⁶Im invarianten Sinn, Einbettungsfragen ausser Acht gelassen.

¹⁷Bew: Es ist $U \subset \{\xi^3 = \dots = \xi^n = 0\}$. Die Einschränkung (Rückzug) g_{Σ} von g auf Σ hat in den Koordinaten (ξ^1, ξ^2) die Darstellung $(g_{ij}(\xi^1, \xi^2, 0, \dots, 0))_{i,j=1,2}$. Die rechte Seite von (9.73) gibt damit auch den Riemannschen Krümmungstensor der induzierten Metrik. (Die Aussage gilt wohlgermerkt nicht für eine beliebige Untermannigfaltigkeit $\tilde{\Sigma}$ mit $T_p \tilde{\Sigma} = \Pi$, wie man leicht am Beispiel von \mathbb{R}^3 sieht.)

Lemma 9.16. *Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $S : V^{\times 4} \rightarrow \mathbb{R}$ eine multi-lineare Abbildung mit den gleichen Symmetrie-Eigenschaften wie die Krümmungsform, d.h.*

$$S(x, y, u, v) = -S(y, x, u, v) = -S(x, y, v, u) = S(u, v, x, y) \quad \forall x, y, u, v \in V \quad (9.74)$$

Dann folgt aus $S(x, y, x, y) = 0$ für alle linear unabhängigen $x, y \in V$, dass $S = 0$ identisch verschwindet.

Beweis. · Zunächst ist festzuhalten, dass aus der Antisymmetrie natürlich folgt, dass $S(x, y, x, y) = 0$ auch für linear abhängige x, y .¹⁸

· Durch Ausnutzen von Multilinearität und (9.74) finden wir zunächst

$$\begin{aligned} 0 &= S(x + u, y, x + u, y) = S(x, y, x, y) + S(u, y, u, y) \\ &\quad + S(x, y, u, y) + S(u, y, x, y) = 2S(x, y, u, y) \quad \forall x, y, u \in V \end{aligned} \quad (9.75)$$

und dann

$$\begin{aligned} 0 &= S(x, y + v, u, y + v) = S(x, y, u, y) + S(x, v, u, v) \\ &\quad + S(x, y, u, v) + S(x, v, u, y) = S(x, y, u, v) - S(y, u, x, v) \end{aligned} \quad (9.76)$$

In der verschwindenden zyklischen Summe $S(x, y, u, v) + S(y, u, x, v) + S(u, x, y, v) = 0$ sind also alle drei Terme gleich, daher Null. \square

Korollar 9.17. *(i) Die Schnittkrümmung bestimmt die Riemannsche Krümmungsform vollständig, d.h. Ist $S : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ eine multi-lineare Abbildung mit den gleichen Symmetrie-Eigenschaften wie R_p^b , so folgt aus*

$$\frac{S(v, w, w, v)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} = K_p(\text{span}_{\mathbb{R}}\{v, w\}) \quad \forall v, w \in T_p M \text{ l.u.} \quad (9.77)$$

dass $S = R_p^b$.

(ii) Gilt $K_p = 0$ für alle $p \in M$ (oder einer offenen Menge), so ist M lokal isometrisch zum euklidischen \mathbb{R}^n .

Beweis. (i) Die Differenz $S - R_p^b$ hat die gleichen Symmetrie-Eigenschaften wie S und R_p^b und erfüllt $(S - R_p^b)(v, w, w, v) = 0 \quad \forall v, w$, ist also 0 nach dem Lemma 9.16. (ii) folgt aus (i) und 9.10. \square

Ricci- und Skalarkrümmung

Definition 9.18. Sei (M, g) ein Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannschem Krümmungstensor $R : \mathfrak{X}(M)^{\times 3} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$. Die partielle Spur $\text{Ric} := C_1^1 R$, Kontraktion der ersten kovarianten mit der kontravarianten Position heisst Ricci-Tensor.

¹⁸Im Falle gemischter Signatur muss man in der Formulierung etwas aufpassen, da der Nenner von (9.70) auch für linear abhängige v_1, v_2 verschwinden kann.

§9. KRÜMMUNG

Erinnerung an die Definition 6.11: Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $R(\cdot, X)Y : \mathfrak{X}(M) \ni Z \mapsto R(Z, X)Y \in \mathfrak{X}(M)$ eine Abbildung von $\mathcal{F}(M)$ -Moduln, Ric ihre (punktweise) Spur.

· Ist (X_1, \dots, X_n) ein lokaler Rahmen von TM , mit dualem Rahmen $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, (d.h. $\lambda^i(X_j) = \delta_j^i$) so gilt

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \lambda^i(R(X_i, X)Y) \quad (9.78)$$

Insbesondere gilt in lokalen Koordinaten

$$\text{Ric}_{ij} = R_{kij}^k \quad (9.79)$$

Lemma 9.19. (i) Ist (X_1, \dots, X_n) ein lokaler Rahmen von TM , (G^{ij}) die zu $(G_{ij}) = g(X_i, X_j)$ punktweise inverse Matrix, so gilt

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g(R(X_i, X)Y, X_j)G^{ij} \quad (9.80)$$

(ii) Ist (X_1, \dots, X_n) speziell ein lokaler Orthonormalrahmen von TM , so gilt

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(X_i, X)Y, X_i) \quad (9.81)$$

(iii) Der Ricci-Tensor ist symmetrisch: $\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(Y, X)$.

Beweis. (i) Der zu (X_i) duale Rahmen ist $\lambda^i = G^{ij}X_j$.

(ii) $G_{ij} = \delta_{ij}$, $G^{ij} = \delta^{ij}$.

(iii) folgt aus (i) und 9.7 (4). □

Beachte: Lokale Orthonormalrahmen existieren, sind aber normalerweise nicht parallel und können daher auch nicht zu lokalen Koordinaten integriert werden, vgl. 9.10 (ii).

· Wegen der Symmetrie von Ric gilt $\forall v, w \in T_pM$

$$\text{Ric}_p(v, w) = \frac{1}{2}(\text{Ric}_p(v+w, v+w) - \text{Ric}_p(v, v) - \text{Ric}_p(w, w)) \quad (9.82)$$

d.h. der Ricci-Tensor ist vollständig durch die zugehörige quadratische Form (Ricci-Krümmung) bestimmt, welche sich wiederum als geeigneter Mittelwert der Schnittkrümmung über die orthogonalen Richtungen interpretieren lässt: Für $n \geq 2$ und $T_pM \ni v \neq 0$ sei

$$S^{n-2}(v^\perp) := v^\perp \cap S^{n-1} = \{w \in T_pM \mid \langle w, w \rangle = 1, \langle w, v \rangle = 0\} \quad (9.83)$$

Dann gilt:¹⁹

¹⁹Zur Erinnerung: Das Volumen der euklidischen Einheitskugel $S^{n-1} := C_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist $\text{Vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

Proposition 9.20.

$$\frac{\text{Ric}_p(v, v)}{\langle v, v \rangle} = \frac{n-1}{\text{Vol}(S^{n-2})} \int_{S^{n-2}(v^\perp)} K_p(\text{span}_{\mathbb{R}}(v, w)) dw \quad (9.84)$$

wobei das Integral bezüglich der euklidischen Volumenform berechnet wird.

Beweis. OBdA sei $(b_1 = v, b_2, \dots, b_n)$ eine ONB von $T_p M$, $(w^1 = 0, w^2, \dots, w^n)$ die Komponenten von $w \in v^\perp = \{w^1 = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist

$$\int_{S^{n-2}(v^\perp)} K_p(\text{span}_{\mathbb{R}}(v, w)) dw = \int_{S^{n-2}} R_{p1jk1}^b(p) w^j w^k dw \quad (9.85)$$

Beh.: Für $j, k = 2, \dots, n$ gilt:

$$A^{jk} := \int_{S^{n-2}} w^j w^k dw = \delta^{jk} \frac{\text{Vol}(S^{n-2})}{n-1} \quad (9.86)$$

Bew.: (Beruhend auf dem Lemma von Schur) $A = (A^{jk})_{j,k=2,\dots,n}$ ist jedenfalls eine symmetrische Matrix mit reellen Einträgen. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\langle x, x \rangle = 1$. Dann existiert für jedes $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\langle y, y \rangle = 1$ eine orthogonale Matrix $R \in O(n-1, \mathbb{R})$ (d.h. $\sum_k R_i^k R_j^k = \delta_{ij}$) mit $y_k = R_k^l x_l$ und durch die Substitution $w^k = \sum_l R_k^l \tilde{w}^l$ folgt

$$\begin{aligned} A^{jk} y_k &= \int_{S^{n-2}} w^j w^k y_k dw = \int_{S^{n-2}} \sum_{i,l} R_j^i \tilde{w}^i \tilde{w}^l x_l d\tilde{w} \\ &= \alpha R_j^i x_i = \alpha y_j \end{aligned} \quad (9.87)$$

Es gilt also $A^{jk} = \alpha \delta^{jk}$. Vergleich der Spur ergibt die Behauptung. □

· Zurück in (9.85) folgt

$$\int_{S^{n-2}(v^\perp)} K_p(\text{span}_{\mathbb{R}}(v, w)) dw = \frac{\text{Vol}(S^{n-2})}{n-1} \sum_{j=2}^n R_{p1jj1}^b(p) = \frac{\text{Vol}(S^{n-2})}{n-1} \text{Ric}_p(v, v) \quad (9.88)$$

gemäß (9.81). □

Spezialfälle: · Für $n = \dim M = 2$ gilt in einer ONB

$$\text{Ric}_p(b_1, b_1) = \text{Ric}_p(b_2, b_2) = K_p(T_p M), \quad \text{Ric}_p(b_1, b_2) = 0 \quad (9.89)$$

(s. die Formel (9.81)), d.h. basisunabhängig auch

$$\text{Ric} = K \cdot g \quad (9.90)$$

· Für $n = \dim M = 3$ gilt in einer ONB

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p(b_1, b_1) &= K_p(\text{span}(b_1, b_2)) + K_p(\text{span}(b_1, b_3)) \\ \text{Ric}_p(b_2, b_2) &= K_p(\text{span}(b_2, b_1)) + K_p(\text{span}(b_2, b_3)) \\ \text{Ric}_p(b_3, b_3) &= K_p(\text{span}(b_1, b_3)) + K_p(\text{span}(b_2, b_2)) \end{aligned} \quad (9.91)$$

§9. KRÜMMUNG

Ist also $\Pi \in T_p M$ mit ONB (b_1, b_2) , durch b_3 ergänzt zu einer ONB von $T_p M$, so ist die Schnittkrümmung

$$K_p(\Pi) = \frac{1}{2}(\text{Ric}(b_1, b_1) + \text{Ric}(b_2, b_2) - \text{Ric}(b_3, b_3)) \quad (9.92)$$

Die Ricci-Krümmung bestimmt also die Schnittkrümmung vollständig, und damit wegen 9.17 auch die Riemannsche Krümmungsform. (Aus (9.91) folgt nicht, dass Ric_p in einer ONB diagonal ist. Ric wie auch R hat 6 algebraisch unabhängige Komponenten.)

· In Dimension > 3 kann die Schnittkrümmung nicht aus dem Ricci-Tensor alleine rekonstruiert werden.

Definition 9.21. Die metrische Kontraktion des Ricci-Tensors heisst Ricci-Skalar (oder auch Skalarkrümmung).

$$S := C_{12} \text{Ric} = \sum_{ij} G^{ij} \text{Ric}(X_i, X_j) = \sum_i \text{Ric}(X_i, X_i) \in \mathcal{F}(M) \quad (9.93)$$

bzgl. lokalem Rahmen / Orthonormalrahmen.

Die Skalarkrümmung ist ein Mittelwert der Ricci-Krümmung über die Einheitskugel $C_1(0) \subset T_p M$:

Proposition 9.22.

$$S_p = \frac{n}{\text{Vol}(S^{n-1})} \int_{C_1(0)} \text{Ric}_p(v, v) dv \quad (9.94)$$

Beweis. Wie von 9.20. □

Diese Mittelwertinterpretation des Ricci-Skalars erlaubt uns nun, eine Ankündigung von S. 73 einzulösen.

Proposition 9.23. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $p \in M$. Für $0 < r < \rho_p$ sei $S_r(p)$ die geodätische Kugel vom Radius r , und $\text{Vol}(S_r(p))$ ihr Riemannsches Volumen (vgl. (8.1)). $\text{Vol}(C_r(0)) = r^{n-1} \text{Vol}(S^{n-1})$ sei das Volumen der euklidischen Kugel vom Radius r . Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(S_r(p)) - \text{Vol}(C_r(0))}{r^{n+1} \text{Vol}(S^{n-1})} = -\frac{S_p}{6n} \quad (9.95)$$

Beweis. Gemäss 8.20 ist $S_r(p)$ diffeomorph unter Exp_p^{-1} zu $C_r(0) \xrightarrow{i} T_p M \cong \mathbb{R}^n$ via Normalkoordinaten (ξ^1, \dots, ξ^n) . Die Formel (8.1) besagt

$$\text{Vol}(S_r(p)) = \int_{C_r(0)} \sqrt{\det i^*(\text{Exp}_p^{-1})^* g} d^{n-1} \xi \quad (9.96)$$

Wegen des Gaußschen Lemmas 8.21 gilt aber an jedem Punkt $\xi \in C_r(0)$ die orthogonale Zerlegung $T_\xi T_p M = \mathbb{R}\xi \oplus T_{C_r(0)}$ mit $((\text{Exp}_p^{-1})^* g)_\xi = dr^2 \oplus (i^*(\text{Exp}_p^{-1})^* g)_\xi$, d.h. insbesondere

$$\sqrt{\det i^*(\text{Exp}_p^{-1})^* g} = \sqrt{\det(\text{Exp}_p^{-1})^* g} \quad (9.97)$$

Damit folgt aus 9.8,

$$g_{il} = \delta_{il} - \frac{1}{3} R_{ijkl}(p) \xi^j \xi^k + \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad (9.98)$$

für kleine r die Entwicklung ($D \det = \text{tr}$)

$$\sqrt{\det i^*(\text{Exp}_p^{-1})^* g} = 1 - \frac{1}{6} \sum_i R_{ijki}(p) \xi^j \xi^k + \mathcal{O}(|\xi|^3) = 1 - \frac{1}{6} \text{Ric}_{jk}(p) \xi^j \xi^k + \mathcal{O}(|\xi|^3) \quad (9.99)$$

Mit 9.22:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S_r(p)) &= \int_{C_r(0)} \left(1 - \frac{1}{6} \text{Ric}_{jk}(p) \xi^j \xi^k + \mathcal{O}(|\xi|^3)\right) d\xi \\ (\text{Subst. } \xi \rightarrow r\xi) &= r^{n-1} \left[\int_{C_1(0)} \left(1 - \frac{r^2}{6} \text{Ric}_{jk}(p) \xi^j \xi^k\right) d\xi + \mathcal{O}(r^3) \right] \\ &= r^{n-1} \text{Vol}(S^{n-1}) \left(1 - \frac{r^2}{6} \frac{S_p}{n} + \mathcal{O}(r^3)\right) \end{aligned} \quad (9.100)$$

□

Für die ART sind wichtig:

Definition 9.24. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (i) M heisst Ricci-flach, falls $\text{Ric} = 0$.
- (ii) M heisst Einstein-Mannigfaltigkeit, falls eine konstante $\Lambda \in \mathbb{R}$ existiert s.d. $\text{Ric} = \Lambda g$.
- (iii) Das Tensorfeld vom Typ $(0, 2)$,

$$G := \text{Ric} - \frac{1}{2} S \cdot g \quad (9.101)$$

heisst Einstein-Tensor von M .

Lemma 9.25. (i) Für $n > 2$ gilt $\text{Ric} = 0 \Leftrightarrow G = 0$.

(ii) Der Einstein-Tensor ist symmetrisch und Divergenz-frei, d.h. es gilt

$$C_{13} \nabla G = 0 \quad (9.102)$$

(in Koordinaten: $G^i_j = 0$)

Beweis. (i) Es ist $C_{12}g = \text{tr id}_{TM} = n$, und daher $C_{12}G = S - \frac{n}{2}S$, also $S = \frac{2}{2-n}C_{11}G$, oder

$$\text{Ric} = G + \frac{2}{2-n} C_{11}G \cdot g \quad (9.103)$$

Aus (9.101) folgt $\text{Ric} = 0 \Rightarrow G = 0$, aus (9.103) folgt $G = 0 \Rightarrow \text{Ric} = 0$.

(ii) Per Definition ist $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(\nabla_X \text{Ric})(Y, Z) = (\nabla_X C_{14}R^b)(Y, Z) = (C_{14} \nabla_X R^b)(Y, Z) \quad (9.104)$$

§ 10. LIE-GRUPPEN

da kovariante Ableitung mit metrischer Kontraktion vertauscht (siehe 7.15²⁰), und daher

$$(C_{13}\nabla \text{Ric})(Z) = (C_{13}C_{25}\nabla R^b)(Z) \quad (9.105)$$

bezüglich einem lokalen Orthonormalrahmen (X_1, \dots, X_n) also

$$\begin{aligned} (C_{13}\nabla \text{Ric})(Z) &= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{X_i} R^b)(X_j, Z, X_i, X_j) \\ (2. \text{ Bianchi-Id. (9.42)}) &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{X_j} R^b)(Z, X_i, X_i, X_j) - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_Z R^b)(X_i, X_j, X_i, X_j) \\ (\text{Anti-Symmetrie}) &= - \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{X_i} R^b)(X_j, Z, X_i, X_j) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_Z R^b)(X_i, X_j, X_j, X_i) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_Z (C_{12}C_{14}R^b) \\ &= \frac{1}{2} Z(S) = \frac{1}{2} C_{12} \nabla(S \cdot g) \end{aligned} \quad (9.106)$$

wobei wir u.a. benutzt haben, dass eine kovariante Ableitung $\nabla_Z R^b$ die gleichen Symmetrie-Eigenschaften hat wie R^b (Übungsaufgabe). \square

Schnittkrümmung, Ricci-Krümmung und Skalarkrümmung spielen in den weiteren Untersuchungen der Geometrie von (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten eine zentrale Rolle. Insbesondere beeinflusst ihr Vorzeichen die Konvergenz/Divergenz von Geodäten über kurze wie lange Zeiten. So geht etwa die Aussage 9.23, dass für positive Krümmung (Sphäre) das Volumen der geodätischen Sphäre mit dem Radius langsamer wächst als im flachen Raum, einher mit der Tatsache, dass die Geodäten “enger aneinander bleiben”. Für negative Krümmung (hyperbolischer Raum) ist es umgekehrt.

§ 10 Lie-Gruppen

Wir hatten in 6.4 Lie-Gruppen als Beispiele von parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten kennengelernt, und in den Übungen in einigen Beispielen auch schon ihre Tangentialräume berechnet. Kurze Wiederholung:

Definition 10.1. Eine Lie-Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer differenzierbaren Gruppenstruktur, d.h. Multiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ und Inversenbildung $i : G \rightarrow G$ sind differenzierbar.

Insbesondere sind $\forall h \in G$ die Abbildungen $L_h : G \rightarrow G$, $L_h(g) := m(h, g)$ (Linksmultiplikation/-translation) und $R_h : G \rightarrow G$, $R_h(g) := m(g, h)$ (Rechtsmultiplikation/-translation) Diffeomorphismen von G .

²⁰Es ist instruktiv, dies in der Art von (9.81) zu verifizieren: Ist T etwa ein Tensor vom Typ $(0, 2)$ und (X_1, \dots, X_n) ein Orthonormalrahmen, so gilt $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ gar nicht ganz offensichtlich $\sum_i XT(X_i, X_i) = \sum_i (\nabla_X T)(X_i, X_i)$ bzw. äquivalent dazu $\sum_i (T(\nabla_X X_i, X_i) + T(X_i, \nabla_X X_i)) = 0$.

Definition 10.2. Sei G eine Lie-Gruppe. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ heisst links-invariant, falls $(DL_h)_g X_g = X_{L_g h} \forall h, g \in G$. (Analog: rechts-invariant).

Lemma 10.3. (i) Die Menge der links-invarianten Vektorfelder, $\mathfrak{X}^L(G)$, ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum, in natürlicher Weise isomorph zum Tangentialraum am neutralen Element $e \in G$ (oder auch an jedem anderen Punkt $g \in G$). Insbesondere ist G parallelisierbar.

(ii) $\mathfrak{X}^L(G)$ ist eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{X}(G)$ aller Vektorfelder auf G .

Beweis. (i) Vektorraum ist klar. Die Abbildung $\mathfrak{X}^L(G) \ni X \mapsto X_e \in T_e G$ ist offenbar linear mit Umkehrabbildung $T_e G \ni x \mapsto (g \mapsto (DL_g)_e(x) \in T_g G)$, die Linksinvarianz aus der Kettenregel folgend.

(ii) Die Linksinvarianz von $X \in \mathfrak{X}(G)$ ist äquivalent zur Bedingung $X \circ L_h^* = L_h^* \circ X \forall h \in G$ als Endomorphismen von $\mathcal{F}(G)$ (vgl. Betrachtungen auf S. 38). Dann folgt die Linksinvarianz von $[X, Y]$ aus der von X, Y unmittelbar durch Nachrechnen. \square

Definition 10.4. Sei G eine Lie-Gruppe. Die Lie-Algebra von G ist der Vektorraum $\mathfrak{g} := T_e G$ mit der Lie-Klammer

$$\mathfrak{g} \ni x, y \mapsto [x, y] := [X, Y]_e \in \mathfrak{g} \tag{10.1}$$

wobei $X, Y \in \mathfrak{X}^L(G)$ die unter dem obigen Isomorphismus zu x, y gehörenden links-invarianten Vektorfelder sind.

Beispiel 10.5. $\cdot GL(n, \mathbb{R})$. Als Vektorraum ist $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = T_{\text{id}} GL(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$. Der Isomorphismus mit $\mathfrak{X}^L(GL(n, \mathbb{R}))$ ist

$$x \mapsto \left(g \mapsto X_g = (gx)_j^i \frac{\partial}{\partial a_j^i} \right) \tag{10.2}$$

Matrixmultiplikation \nearrow \nwarrow Standardbasis von $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$

woraus unmittelbar folgt, dass die durch links-invariante Vektorfelder definierte Lie-Klammer mit dem gewöhnlichen Matrixkommutator übereinstimmt.

- $\cdot SL(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\text{tr } x = 0\}$
- $\cdot SO(n), SU(n), Sp(n)$

Die zentralen Ziele der Lie-Theorie sind die Klassifikation von Lie-Gruppen sowie ihre Realisierung als Invarianzgruppen (etwa als lineare Darstellungen auf Vektorräumen). Wir wollen hier zwei geometrische Argumente vorstellen, die in den Vorlesungen hinter den vielen algebraischen Betrachtungen manchmal zurückstehen. Das erste betrifft die Rekonstruktion von Lie-Gruppen aus Lie-Algebren und greift auf unsere Untersuchungen zur Integrierbarkeit von Vektorfeldern aus § 6 zurück. Das zweite knüpft direkt an unsere Diskussion von Riemannscher Geometrie, Geodäten und Krümmung an, und zeigt die Existenz einer invarianten orthogonalen Struktur auf der Lie-Algebra einer kompakten Lie-Gruppe.

Chevalley-Frobenius

Wir hatten in den Übungen bereits ein-Parameter Untergruppen von $GL(n, \mathbb{R})$ kennengelernt.

Lemma 10.6. *Sei G eine Lie-Gruppe, $X \in \mathfrak{X}^L(G)$. Dann ist X vollständig, d.h. der durch X erzeugte Fluss Φ^x ist auf ganz \mathbb{R} definiert.*

Beweis. Es genügt festzustellen, dass mit jeder Integralkurve $\gamma : I \rightarrow G$ von X auch alle Linkstranslationen $L_g \circ \gamma$ Integralkurven sind (Kettenregel). Insbesondere ist für $0 < t_0 \in I$ $t \mapsto \gamma(t_0)\gamma(t)$ eine Integralkurve durch $\gamma(t_0)$, welche für $t \in I \cap (I - t_0) \ni 0$ mit $\gamma(t_0 + t)$ übereinstimmt und daher zur Fortsetzung von γ auf $I + t_0$ (und von da aus auf ganz \mathbb{R}) benutzt werden kann. \square

Definition 10.7. Für jedes $x \in \mathfrak{g} = T_e G$ seien $X \in \mathfrak{X}^L(G)$ und $\Phi^x : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(G)$ das zugehörige links-invariante Vektorfeld und Fluss. Wir definieren die Exponentialabbildung zu G ,

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad \text{durch} \quad \exp(x) := \Phi^x(1)(e) \tag{10.3}$$

Mit anderen Worten ist $\exp(x) = \gamma_e^x(1)$ die Integralkurve von X durch e , fortgesetzt bis zu $t = 1$.

Bemerkungen. · Für $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \ni x$ (ebenso wie für alle anderen Matrix Lie-Gruppen) ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{10.4}$$

die gewöhnliche Matrix-Exponentialfunktion.

· Wir zeigen weiter unten, dass jedenfalls für kompakte Lie-Gruppen die Exponentialabbildung 10.7 in engem Zusammenhang mit der Exponentialabbildung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten 8.15 steht.

· Bereits jetzt gilt $\forall t \in \mathbb{R}: \Phi^x(t)(e) = \exp(tx)$, und $\forall g \in G$ ist $t \mapsto g \exp(tx)$ eine Integralkurve von X durch g . Insbesondere ist

$$\exp((t_1 + t_2)x) = \exp(t_1x) \exp(t_2x) \tag{10.5}$$

· Ausserdem ist auch das Differential bei $0 \in \mathfrak{g} \cong T_0\mathfrak{g}$ wegen

$$(D \exp)_0(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tx) = x \tag{10.6}$$

einfach $(D \exp)_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, und wir können also \exp für die Konstruktion natürlicher Koordinaten auf G benutzen.

· Die obigen Betrachtungen (10.5) besagen, dass nicht-triviale ein-Parameter Untergruppen von G in Bijektion zu ein-dimensionalen Unterräumen von \mathfrak{g} stehen. Das Beispiel (4.29) zeigt, dass solche ein-Parameter Untergruppen i.A. keine eingebetteten Untermannigfaltigkeiten von G sind.

· Ein fundamentales Resultat auf dem Weg zur angekündigten Korrespondenz zwischen Lie-Algebren und Lie-Gruppen ist die Verallgemeinerung der Exponentialabbildung auf höher-dimensionale Unterobjekte. Dabei ist eine Richtung klar.

Definition 10.8. Eine Lie-Untergruppe einer Lie-Gruppe G ist eine Untergruppe H von G mit einer Topologie und differenzierbaren Struktur, in der H eine Lie-Gruppe und eine immergierte Untermannigfaltigkeit von G ist.

(Die Topologie von H kann also feiner als die von G induzierte Relativtopologie sein. Die Inklusion $H \hookrightarrow G$ muss eine Immersion von Mannigfaltigkeiten sein. Die auf H eingeschränkten Gruppenoperationen von G müssen mit der differenzierbaren Struktur auf H verträglich sein.)

Proposition 10.9. Sei $\iota : H \hookrightarrow G$ eine Lie-Untergruppe von G .

(i) Die Lie-Algebra \mathfrak{h} von H ist in kanonischer Weise (nämlich mittels $D\iota_e : T_e H \mapsto T_e G$) eine Unteralgebra von \mathfrak{g} .

(ii) Der Vektorraum

$$\mathfrak{X}^L(G, \mathfrak{h}) := \{X \in \mathfrak{X}^L(G) \mid X_e \in \mathfrak{h}\} \quad (10.7)$$

ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{X}^L(G)$, ebenfalls kanonisch isomorph zu \mathfrak{h} .

Beweis. $(D\iota)_e$ ist injektiv, da ι eine Immersion ist, \mathfrak{h} ist also auf jeden Fall ein Untervektorraum von \mathfrak{g} . Für jedes $y \in \mathfrak{h}$ existiert dann ein eindeutiges $Y \in \mathfrak{X}^L(H)$ mit $Y_e = y$ sowie ein eindeutiges $Y^G \in \mathfrak{X}^L(G, \mathfrak{h})$ mit $Y_e^G = (D\iota)_e(y)$.

· Da ι ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt $\iota \circ L_h = L_{\iota(h)} \circ \iota \ \forall h \in H$. Daraus folgt, dass Y und Y^G ι -verwandt sind (s. 5.6): $\forall h \in H$ gilt

$$Y_{\iota(h)}^G = (DL_{\iota(h)})_e D\iota_e(y) = D(L_{\iota(h)} \circ \iota)_e(y) = D(\iota \circ L_h)_e(y) = (D\iota)_h Y_h \quad (10.8)$$

m.a.W. $Y \circ \iota^* = \iota^* \circ Y^G$. Da die ι -Verwandtschaft mit der Lie-Klammer verträglich ist (Übungsaufgabe), folgt daraus, dass die von $\mathfrak{X}^L(H)$ auf \mathfrak{h} induzierte Lie-Klammer mit der von G stammenden auf $\mathfrak{X}^L(G, \mathfrak{h})$ übereinstimmt. \square

Theorem 10.10. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} , und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Unteralgebra. Dann existiert eine eindeutige zusammenhängende Lie-Untergruppe H von G mit Lie-Algebra \mathfrak{h} .

Der wesentliche Schritt des Beweises ist die Konstruktion einer immergierten Untermannigfaltigkeit $H \subset G$ mit $e \in H$ und $T_h H = (DL_{\iota(h)})_e(\mathfrak{h}) \ \forall h \in H$ mittels des Frobenius-Theorems, einer Verallgemeinerung von 5.16. Als Korollar dieser Konstruktion folgt, dass H eine Untergruppe von G ist, und dass die Gruppenoperationen auch mit der differenzierbaren Struktur von H verträglich sind.

Definition 10.11. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Eine (Tangential-)Distribution vom Rang k ist ein Untervektorbündel $\mathcal{D} \subset TM$, m.a.W.: $\forall p \in M$ ist $\mathcal{D}_p \subset T_p M$ ein k -dimensionaler Unterraum und es existieren überall lokal Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in TM$ welche punktweise eine Basis von \mathcal{D} bilden.

· Eine Distribution $\mathcal{D} \subset TM$ heisst involutiv, wenn für je zwei lokale Schnitte $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ die Lie-Klammer $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$.

· Involutivität ist offensichtlich äquivalent dazu, dass $\Gamma(\mathcal{D})$ eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{X}(M)$ ist. (Beachte, dass die Lie-Klammer $[X, Y]$ in $\mathfrak{X}(M)$ berechnet wird.)

§ 10. LIE-GRUPPEN

Beispiel. Die von $X = \partial_x + y\partial_z$ und $Y = \partial_y$ erzeugte Distribution $\mathcal{D} \subset T\mathbb{R}^3$ ist wegen $[X, Y] = -\partial_z \notin \Gamma(\mathcal{D})$ nicht involutiv.

Definition 10.12. Sei $\mathcal{D} \subset TM$ eine Distribution vom Rang k auf M .

- Eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} durch p ist eine zusammenhängende immergierte Untermannigfaltigkeit B von M mit $p \in B$ und $T_q B = \mathcal{D}_q \forall q \in B$.
- \mathcal{D} heisst integrabel, falls durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} geht.
- \mathcal{D} heisst vollständig integrabel, falls M in eine Blätterung durch Integralmannigfaltigkeiten zerfällt, d.h. \exists eine Familie $(B_l)_{l \in \mathcal{L}}$ mit $\cup_{l \in \mathcal{L}} B_l = M$ und $B_l \cap B_{l'} = \emptyset$ für $l \neq l'$ sowie $T_q B_l = \mathcal{D}_q \forall q \in B_l$ mit der Eigenschaft, dass der Raum der lokalen Integralmannigfaltigkeiten eine Untermannigfaltigkeit von M ist (im Sinne von 5.16).
- Insbesondere ist jede Integralkurve eines Schnittes $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ einer integrablen Distribution ganz in einer Integralmannigfaltigkeit enthalten.
- Beispiel: $\mathcal{D} = \text{span}_{\mathcal{F}(M)}(\partial_x + \alpha\partial_y)$ auf $M = S^1 \times S^1$. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ sind die Integralmannigfaltigkeiten kompakt und $\mathcal{L} = \mathbb{R}/(\alpha\mathbb{Z} + \mathbb{Z})$, andernfalls sind die Blätter diffeomorph zu \mathbb{R} und \mathcal{L} ist keine Mannigfaltigkeit.
- Gemäss 5.16 sind von kommutierenden und punktweise linear unabhängigen Vektorfeldern aufgespannten Unterbündel von TM Beispiele von involutiven und vollständig integrablen Distributionen. Man sieht leicht, dass jede vollständig integrable Distribution involutiv ist. Bemerkenswert ist die Umkehrung.

Theorem 10.13 (Frobenius-Theorem). *Jede involutive Distribution ist vollständig integrabel.*

Beweis. Wir zeigen, dass \mathcal{D} lokal durch *kommutierende* Vektorfelder aufgespannt wird. Dann folgt die Existenz einer lokalen Blätterung aus 5.16. Den Nachweis, dass sich die Blätter global zu immergierten Untermannigfaltigkeiten von M zusammenkleben lassen, lassen wir aus.

- Sei Y_1, \dots, Y_k ein lokaler Rahmen von \mathcal{D} in einer Koordinatenumgebung U von $p \in M$, o.E. mit der Eigenschaft, dass

$$\mathcal{D}_p \cap \text{span}_{\mathbb{R}}(\partial_{k+1_p}, \dots, \partial_{n_p}) = \emptyset \quad (10.9)$$

U mit einer offenen Menge des \mathbb{R}^n identifizierend sei $\pi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten, mit induzierter Bündelabbildung $D\pi : TU \rightarrow T\mathbb{R}^k$. Es gilt $D\pi(\partial_i) = 0$ genau für $i > k$, denn (10.9) besagt, dass $D\pi_p : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}^k = T_{\pi(p)}\mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch noch in einer ganzen Umgebung von p . Wir setzen für q in dieser Umgebung und $i = 1, \dots, k$

$$X_{iq} := (D\pi_q)^{-1}(\partial_{i\pi(q)}) \quad (10.10)$$

Dann ist (X_1, \dots, X_k) ein lokaler Rahmen von \mathcal{D} um p , und aus der Definition folgt, dass X_i und ∂_i π -verwandt sind, d.h. $X_i \circ \pi^* = \pi^* \circ \partial_i$. Aus $[\partial_i, \partial_j] = 0$ und der Verträglichkeit der π -Verwandtschaft mit der Lie-Klammer folgt $[X_i, X_j] \in \text{Ker } D\pi$. Da aber $[X_i, X_j] \in \Gamma(\mathcal{D})$ (Involutivität) und $\text{Ker } D\pi$ komplementär zu \mathcal{D} ist, folgt $[X_i, X_j] = 0$. \square

Beweis von 10.10 (grobe Skizze). $\mathfrak{X}^L(G, \mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{X}^L(G) \mid X_e \in \mathfrak{h}\}$ ist per Definition eine involutive Distribution. Sei $H := B_e$ ihre Integralmannigfaltigkeit durch $e \in G$. Aus der Linksinvarianz der Distribution folgt, dass für jedes $g \in G$ $B_g = L_g(B_e)$ ebenfalls eine Integralmannigfaltigkeit ist (vgl. (10.5)) und daraus, dass H eine Untergruppe von G ist: Für alle $h, h' \in H$ gilt $hh' = L_h(h') \in L_h(H) = L_h(B_e) = B_h = H$. (Denn durch jeden Punkt geht genau eine Integralmannigfaltigkeit.) Aus der lokalen Struktur von Integralmannigfaltigkeiten folgt, dass die Gruppenoperationen mit der differenzierbaren Struktur auf H verträglich sind: $m : H \times H \rightarrow G$ und $i : H \rightarrow G$ sind als Verkettung von differenzierbaren Abbildungen differenzierbar, und lokal liegt ihr Bild in einem Koordinatenschnitt $(x^{k+1}, \dots, x^n) = \text{const.}$, die Aussage folgt dann durch Projektion. \square

Cartan-Killing

Mit einer gegebenen globalen Trivialisierung (X_1, \dots, X_n) von TG durch links-invariante Vektorfelder fällt es nicht schwer, eine Riemannsche Metrik auf einer Lie-Gruppe anzugeben, in der Linkstranslationen durch Isometrien wirken: Wir wählen ein beliebiges inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem n -dimensionalen Vektorraum $T_e G = \mathfrak{g}$ und setzen es durch

$$\langle X_i, X_j \rangle := \langle (X_i)_e, (X_j)_e \rangle \quad (10.11)$$

auf ganz G fort. (Übungsaufgabe: Diese Zuordnung ist glatt und links-invariant.)
 · Nicht klar, aber für die Darstellungstheorie von zentraler Bedeutung, ist die Frage, ob $\langle \cdot, \cdot \rangle$ so gewählt werden kann, dass sie auch unter Rechtstranslationen invariant ist.

· Dies ist genau dann der Fall, wenn für jedes $h \in G$ nicht nur L_h , sondern auch die Konjugation mit h ,

$$\text{AD}_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto \text{AD}_h(g) := hgh^{-1} \quad (10.12)$$

eine Isometrie von $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

· Wegen der links-invarianten Definition (10.11) ist dies wiederum äquivalent dazu, dass die Ableitung von AD_h bei e ,

$$\text{Ad}_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}_h(x) := (D \text{AD}_h)_e(x) \in \mathfrak{g} \quad (10.13)$$

(beachte $\text{AD}_h(e) = e$) mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verträglich ist, d.h.

$$\langle \text{Ad}_h(x), \text{Ad}_h(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (10.14)$$

· Mit Hilfe der Exponentialabbildung (in der Gruppenversion 10.7) kann man zeigen, dass die Ableitung von $G \ni h \mapsto \text{Ad}_h \in GL(\mathfrak{g})$ bei $0 \in \mathfrak{g}$ gleich der Lie-Klammer auf \mathfrak{g} ist,

$$(D \text{Ad})_0(x)(y) = \text{ad}_x(y) := [x, y] \quad (10.15)$$

$((D \text{Ad})_0(x) \in \text{End}(\mathfrak{g}) = T_e GL(\mathfrak{g}))$

· Durch nochmaliges Ableiten von (10.14) erhalten wird dann die Bedingung

$$\langle \text{ad}_x y, z \rangle + \langle y, \text{ad}_x z \rangle = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad (10.16)$$

§ 10. LIE-GRUPPEN

- Existiert auf \mathfrak{g} ein euklidisches inneres Produkt mit der Eigenschaft (10.16), so ist die durch (10.11) auf ganz G erklärte Riemannsche Metrik invariant unter Links- und Rechtstranslationen sowie Konjugation.
- Im Allgemeinen ist (10.16) eine relativ komplizierte algebraische Fragestellung. Mit Hilfe der Differentialgeometrie können wir sie für kompakte Lie-Gruppen vollständig und motiviert beantworten.

Proposition 10.14. *Sei G Lie-Gruppe. Dann existiert eine bis auf Multiplikation mit einer reellen Konstanten eindeutige links-invariante Volumenform $\omega \in \Omega^n(G)$, $\omega_g \neq 0 \forall g \in G$ und so dass $L_h^*(\omega) = \omega \forall h \in G$.*

Beweis. Sei $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^n)$ der zu (X_1, \dots, X_n) duale Rahmen von TG^\vee von links-invarianten Einsformen, d.h. $L_h^*(\Lambda^i) = \Lambda^i \forall i, h$. Dann ist $\omega := \Lambda^1 \wedge \dots \wedge \Lambda^n$ eine links-invariante Volumenform. Ist $\tilde{\omega}$ eine andere Volumenform, so existiert ein $f \in \mathcal{F}(G)$, $f(g) \neq 0 \forall g \in G$ so dass $\tilde{\omega} = f\omega$. Linksinvarianz $\Rightarrow f$ ist konstant. \square

- Die invariante Volumenform kann benutzt werden, um ein Integral (Mittelwert) von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf G zu definieren. (Dazu ist es sinnvollerweise nötig, die Lie-Gruppe so zu orientieren, dass ω überall positiv ist.) Mit den üblichen Grenzprozessen kann dieses Integral zu einem links-invarianten regulären Borel-Mass auf dem zugrunde liegenden topologischen Raum ausgebaut werden. (Haarsches Mass)
- Ebenso existiert natürlich auch eine bis auf eine Konstante eindeutige rechts-invariante Volumenform, welche im Allgemeinen aber verschieden von der links-invarianten ist.

Proposition 10.15. *Ist G kompakt, so ist die links-invariante Volumenform auch rechts-invariant, insbesondere auch AD-invariant.*

Beweis. Da Linkstranslationen mit Rechtstranslationen kommutieren, ist $\forall g \in G$ $R_g^*(\omega)$ links-invariant, es existiert also eine (von g abhängige) Konstante Δ_g so dass $R_g^*\omega = \Delta_g\omega$. Da $\omega > 0$, und G kompakt ist und nicht-triviales Inneres hat, ist $0 < \int_G \omega < \infty$ und aus

$$\Delta_g \int_G \omega = \int_G \Delta_g \omega = \int_G R_g^* \omega \stackrel{\text{Diffeo.}}{=} \int_{R_g(G)} \omega = \int_G \omega \quad (10.17)$$

folgt dann $\Delta_g = 1 \forall g$. (Wir benutzen hier Diffeomorphismen-Invarianz des Integrals, und nicht die Rechtsinvarianz von ω !) \square

- Lie-Gruppen für die links- und rechts-invariante Volumenformen übereinstimmen, heißen unimodular. Sie müssen nicht kompakt sein.

Proposition 10.16. *Sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann existiert ein Ad-invariantes (10.14) euklidisches inneres Produkt auf \mathfrak{g} . Dieses innere Produkt ist insbesondere auch ad-invariant (10.16).*

Beweis. Sei (\cdot, \cdot) ein beliebiges euklidisches inneres Produkt auf \mathfrak{g} . Für $x, y \in \mathfrak{g}$ sei

$$\langle x, y \rangle := \int_G (\text{Ad}_g(x), \text{Ad}_g(y)) \omega \quad (10.18)$$

Dies ist ein wohldefiniertes euklidisches inneres Produkt auf \mathfrak{g} , welches wegen $\text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h = \text{Ad}_{gh} = \text{Ad}_{R_h(g)}$ und der Rechtsinvarianz von ω Ad-invariant ist. \square

· Wir fixieren im Weiteren ein ad-invariantes euklidisches inneres Produkt auf der Lie-Algebra \mathfrak{g} einer kompakten Lie-Gruppe G , fortgesetzt zu einer links- und rechtsinvarianten Riemannschen Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf G , und untersuchen die zugehörige Riemannsche Geometrie.

Lemma 10.17. *Der Levi-Civita Zusammenhang ∇ hat bezüglich einer ONB (X_1, \dots, X_n) von $\mathfrak{X}^L(G)$ die Darstellung*

$$\nabla_{X_i} X_j = \frac{1}{2} [X_i, X_j] \quad (10.19)$$

Beweis. Warnung: Ein links-invarianter Orthonormalrahmen ist im Allgemeinen nicht rechts-invariant. Die über $\mathfrak{X}^R(G)$ definierte Lie-Klammer unterscheidet sich von (10.4) um ein Vorzeichen. Man überlege sich dies sowie die Vereinbarkeit mit (10.19).

· Wegen $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ konstant vereinfacht sich die Koszul-Formel (7.34) zu

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle &= \frac{1}{2} (\langle [X_i, X_j], X_k \rangle - \langle [X_i, X_k], X_j \rangle - \langle [X_j, X_k], X_i \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \langle [X_i, X_j], X_k \rangle \end{aligned} \quad (10.20)$$

$\forall i, j, k$ wegen der ad-Invarianz (10.16). Es folgt (10.19). \square

· Wegen der \mathbb{R} -Linearität von ∇ gilt dann

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}^L(G) \quad (10.21)$$

Korollar 10.18. *Die Geodäten auf G sind genau die Integralkurven der linksinvarianten Vektorfelder. Insbesondere gilt $\forall x \in \mathfrak{g}$*

$$\text{Exp}_e(x) = \exp(x) \quad (10.22)$$

Beweis. Aus $\dot{\gamma} = X_{\gamma(t)}$ und (10.19) folgt $\nabla_t \dot{\gamma} = \frac{1}{2} [X, X] = 0$. (Auch hier überlege man sich wieder die Vereinbarkeit mit der Vertauschung von links und rechts.) \square

Proposition 10.19. *Für die Riemannsche Krümmungsform gilt*

$$R^\flat(X, Y, U, V) = -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [U, V] \rangle \quad (10.23)$$

$\forall X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(G)$.

· Ist (X_1, \dots, X_n) eine ONB von $\mathfrak{X}^L(G)$, so gilt für den Ricci-Tensor

$$\text{Ric}(X, Y) = \frac{1}{4} \sum_i \langle [X_i, X], [X_i, Y] \rangle \quad (10.24)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G)$

§ 10. LIE-GRUPPEN

Beweis. Aus (10.19) und der Jacobi-Identität folgt sofort

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \frac{1}{4}[X_i, [X_j, X_k]] - \frac{1}{4}[X_j, [X_i, X_k]] - \frac{1}{2}[[X_i, X_j], X_k] \\ &= -\frac{1}{4}[[X_i, X_j], X_k] \end{aligned} \quad (10.25)$$

Dann folgt aus der Links- und ad-Invarianz der Metrik

$$R^b(X_i, X_j, X_k, X_l) = -\frac{1}{4}\langle [[X_i, X_j], X_k], X_l \rangle = -\frac{1}{4}\langle [X_i, X_j], [X_k, X_l] \rangle \quad (10.26)$$

zunächst für die links-invariante Basis und dann aus der \mathbb{R} -Linearität des Tensors R^b , für alle Vektorfelder. (Die Gleichung (10.19) gilt hingegen nur für links-invariante Vektorfelder.)

· Die Gleichung (10.24) folgt dann sofort aus (9.81). \square

Korollar 10.20. *Schnittkrümmung und Ricci-Krümmung von G sind nicht-negativ. Hat \mathfrak{g} triviales Zentrum, so ist die Ricci-Krümmung an jedem Punkt positiv definit.*

Beweis. Die Schnittkrümmung ist $R^b(X, Y, Y, X) = \frac{1}{4}\langle [X, Y], [X, Y] \rangle \geq 0$ aus der positiv-Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ditto gilt $\text{Ric}(X, X) \geq 0$.

· Gilt $\text{Ric}_g((DL_g)_e(x), (DL_g)_e(x)) = 0$ für ein $x \in \mathfrak{g}$, so folgt

$$\langle [x_i, x], [x_i, x] \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (10.27)$$

und da die x_i eine Basis von \mathfrak{g} sind, folgt $[x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}$. y liegt also im Zentrum von \mathfrak{g} . \square

· Aus (10.24) (bzw. der ursprünglichen Definition (9.78)) folgt insbesondere, dass wir Ric_e auch als

$$\text{Ric}_e(x, y) = -\frac{1}{4} \text{tr}_{\mathfrak{g}} \text{ad}_x \circ \text{ad}_y \quad (10.28)$$

schreiben können. Diese rein algebraische “Cartan-Killing-Form” ist für alle (endlich-dimensionalen) Lie-Algebren ad-invariant, aber positiv definit nur dann, wenn das Zentrum von \mathfrak{g} trivial ist und die von \mathfrak{g} erzeugte Lie-Gruppe kompakt. In diesem Fall können wir aber insbesondere (10.28) als Riemannsche Metrik benutzen und erhalten das

Korollar 10.21. *Kompakte Lie-Gruppen mit einfacher Lie-Algebra sind positiv gekrümmte Einstein-Mannigfaltigkeiten.*