Die Lösungen zu den Aufgaben sind Dienstags *vor* der Vorlesung abzugeben und werden in der jeweils nächsten Übungsgruppe besprochen. Für jede richtig gelöste Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 8. Sei $d < 0$ eine quadratfreie ganze Zahl, welche durch mindestens zwei Primzahlen teilbar ist. Man überlege sich, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ kein Hauptidealring ist. Man zeige andererseits, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ sogar ein Euklidischer Ring ist bezüglich der üblichen Norm

$$N(x + y\sqrt{6}) \;=\; |x^2 - 6y^2|.$$

Aufgabe 9. Welche der Ringerweiterungen

$$\mathbb{Z} \;\subset\; \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \;\subset\; \mathbb{Z}[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}] \;\subset\; \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}, \sqrt{5}] \;\subset\; \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

sind ganz? Welche der auftretenden Integritätsringe sind ganz abgeschlossen?

Aufgabe 10. Sei K/k eine endliche separable Körpererweiterung. Es ist $K = K(\alpha)$ für ein geeignet gewähltes Element $\alpha \in K$, und wir bezeichnen die Nullstellen des Minimalpolynoms von α in einem algebraischen Abschluß mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{k}$. Man zeige

$$d_{K/k}(\alpha) \;=\; \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

und folgere: Für $n = 3$ ist K/k eine Galoiserweiterung genau dann, wenn $\sqrt{d} \in K$.

Bonusaufgabe. Für kommutative Ringe R und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in Mat_{n\times n}(R)$ beweise man die Identität

$$A^* \cdot A = \det(A) \cdot \mathbb{I}_n.$$

Hierbei ist $\mathbb{I}_n$ die Einheitsmatrix und

$$\begin{aligned} \det(A) \;&=\; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \;\in\; R, \\ A^* \;&=\; \big((-1)^{j+k} \cdot \det(A_{jk})\big)_{1 \le j,k \le n} \;\in\; \mathrm{Mat}_{n\times n}(R), \end{aligned}$$

wobei A_{jk} aus A durch Streichen der j-ten Spalte und k-ten Zeile hervorgeht.