Übungen zur Elementaren Zahlentheorie — Blatt 4

Prof. Dr. R. Weissauer — Sommersemester 2013

Th. Krämer — Abgabe: 13. Mai 2013, 11:14 Uhr

Aufgabe 11. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche genau 15 verschiedene Teiler besitzt (wobei die Teiler 1 und n mitgezählt seien).

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Teileranzahlfunktion σ_0 multiplikativ ist.

Aufgabe 12. Sei f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) \;=\; \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ prim}}} (1 - f(p)).$$

Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für $n \in \mathbb{N}$ äquivalent sind:

(a) n ist eine Primzahl,

(b) $\varphi(n) = n - 1$,

(c) der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsring.

Aufgabe 14. Gegeben seien zwei Polynome $P, S \in k[x]$ in einer Variablen x über einem Körper k, wobei S nicht das Nullpolynom sei. Zeigen Sie, dass es dann eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in k[x]$ gibt mit den Eigenschaften

$$P \;=\; S \cdot Q + R \quad \text{und} \quad \deg(R) \;<\; \deg(S).$$

Für das Nullpolynom $R = 0$ sei dabei per Konvention $\deg(R) = -1$ gesetzt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Eindeutigkeit. Um die Existenz zu zeigen, können Sie dann ein Dimensionsargument aus der linearen Algebra verwenden. Setzen Sie dazu $d = \deg(P)$ und $e = \deg(S)$, und betrachten Sie die zusammengesetzte lineare Abbildung

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{d-e} \arrow[r, "Q \mapsto S \cdot Q"] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{P}_d \arrow[r, two heads] & \mathcal{P}_d/\mathcal{P}_{e-1} \end{tikzcd}$$

wobei $\mathcal{P}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ den Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$ bezeichne.

Die Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung über Elementare Zahlentheorie finden Sie auch auf der zugehörigen Homepage:

`www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/ElementareZahlentheorie/`