Ausarbeitung zum Vortrag im Proseminar Analysis SS 2009
Leitung Prof. Dr. E. Freitag/Thorsten Heidersdorf
Hao Yu

5. Vortrag: Fourierreihen für glatte Funktionen

Die Analysis ist genauso allumfassend wie die Natur selbst. Sie betrifft unsere sämtlichen Sinneserscheinungen, die Zeit ebenso wie die Längen, Kräfte oder Temperaturen. Dies ist eine schwierige Wissenschaftsdisziplin, die nur langsam Fortschritte macht, bei der aber andererseits jedes einmal gewonnene Grundprinzip Bestand hat.

Jospeh Fourier : Die analytische Theorie der Wärme, 1807

Die Theorie der Fourieranalyse kann auf die Untersuchung zur Lösung der Differentialgleichung zurückführen. Wir suchen eine Lösung der Wellengleichung [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \tag{1}$$

wobei $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$, μ sei der Youngsche Elastizitätsmodul und ρ die Massendichte. Die beiden hängen nicht von x und t ab.
Die Saite sei an ihren Endpunkten befestigt, es gelte also die Randbedingung

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

Und die Anfangsbedingung wird gegeben durch

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq L \tag{3}$$

Die Idee ist Trennung der Veränderlichen. Wir suchen zunächst nach Lösungen der Differentialgleichung (1), die von der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \qquad T(t) \not\equiv 0 \tag{4}$$

sind. Die Lösung erfüllt die Gleichung (1), so muss gelten

$$X(x)T''(t) = c^2 T(t) X''(x) \tag{5}$$

und daher

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Da die linke Seite nur von t abhängig und die rechte nur von x abhängig ist, müssen die beide Seiten konstant sein.

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda$$

Wir haben jetzt zwei gewöhnliche Differentialgleichung

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{7}$$

Die Gleichung (4) erfüllt die Randbedingung (2), daher ist

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$$

Da $T(t)$ nicht identisch Null ist, muss

$$X(0) = X(L) = 0$$

Wir haben die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (8) \\ X(0) = X(L) = 0 & (9) \end{cases}$$

(a) Falls $\lambda < 0$, hat die Gleichung (8) Lösungen der Form

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

nach der Randbedingung (9) ist

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\sqrt{-\lambda}L} + Be^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \end{cases}$$

daher ist $A = B = 0$ und $X(x) \equiv 0$, die (4) nicht erfüllt.
(b) Falls $\lambda = 0$, hat die Gleichung (8) Lösungen der Form

$$X(x) = Ax + B$$

nach der Randbedingung (9) ist

$$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(L) = AL + B = 0 \end{cases}$$

so ist wieder $A = B = 0$ und $X(x) \equiv 0$, die (4) nicht erfüllt.
(c) Falls $\lambda > 0$, hat die Gleichung (8) Lösungen der Form

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

nach der Randbedingung (9) ist

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = A\cos(\sqrt{\lambda}L) + B\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{cases}$$

wenn $B = 0$, dann ist $X(x) \equiv 0$, die (4) nicht erfüllt. Daher muss $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, daraus folgt

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}^+ \tag{10}$$

und

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{11}$$

und daher ist

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \tag{12}$$

Jede Funktion

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{13}$$

erfüllt die Differtialgleichung (1) und die Randbedingung (2) Nach dem Superpositionsprinzip ist die endliche Summe $\sum_{n=1}^{N} u_n(x,t)$ wieder Lösung von (1) und (2). Falls die Reihe $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ bei Wahl der Koeffizienten a_n und b_n konvergiert und zweimal gliedweise differenzierbar ist, dann ist $u(x,t)$ auch der Lösung von (1) und (2). Nach der Anfangbedingung (3) gilt

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{14}$$

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{15}$$

Um a_n zu erhalten, bilden wir das Integral

$$\int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi} a_n \sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_k \sin^2(kx)\mathrm{d}x = \frac{L}{2} a_k$$

Dabei benutzen wir Die Orthogonalität der Sinusfunktionen und nehmen an, dass die Stabilität bei Grenzübergang bleibt. Daher ist

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x \tag{16}$$

Analog ist

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \tag{17}$$

Daniel Bernoulli (1700-1787) äußerte die Vermutung, dass Jede Lösung der Gleichungen (1), (2) und (3) hat eine Darstellung der Form solcher unendlichen Reihe.[2] Dies führte zu heftigen kontroversen Diskussionen unter Beteiligung von Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d' Alembert (1717-1783) und Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Allgemein kann man fragen, unter welcher Bedingung ist eine 2π-periodische Funktion darstellbar in der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) \tag{18}$$

1822 führte Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) in seinem Werk „ Die analytische Theorie der Wärme “ die bekannte Koeffizientenbestimmung aus

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{19}$$

Er behaupte mit einem falschen Beweis, dass sich alle Funktionen in der Form (18) darstellen lassen, wobei die Koeffizienten a_n, b_n gemäß (19) zu berechnen sind. Die Behauptung ist tatsächlich nicht richtig. Im Jahr 1829 zeigte Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) den folgenden bekannten Satz.

Satz 1. (Dirichlet)
Für alle stückweise glatten 2π-periodischen Funktionen f konvergiert (18) *in jedem Punkt. Die stellt die Funktion in allen Punkten dar, in denen die Funktion stetig ist. In den Sprungstellen stellt sie das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten dar.*[3][4]

Der Satz werden wir im 6. Vortrag bewiesen. In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit den glatten Funktionen.

Die Erfahrung zeigt, dass Berechnungen, in denen Sinus- und Cosinus-Funktionen auftreten, häufig einfacher werden, wenn man mit der komplexen Exponentialfunktion arbeitet. Wir fangen mit der komplexen Fourierreihe an und werden am Ende die reelle Darstellung (18) und (19) zurückgewinnen.

Hilfssatz 2. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine 2π-periodische Funktion, falls sie als Summe einer gleichsmäßig konvergenten trigonometrischen Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ darstellbar ist, dann gilt $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$*

Beweis: Aus dem Stabilitätssatz folgt

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x}\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi\delta_{nk} \\
&= 2\pi c_k
\end{aligned}
$$

Definition 3. *$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$ mit $k \in \mathbb{Z}$ heißen die Fourierkoeffizieten von f, und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ heißt die Fourierreihe von f.*

Definition 4. *Die Menge aller komplexwertigen stetigen 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$*

$$C_{2\pi}\big(\mathbb{R},\mathbb{C}\big) := \big\{f \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\big\} \tag{20}$$

ist ein komplexer Vektorraum. $\langle f,g\rangle_2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ definiert ein Skalarprodukt auf V. Dieses Skalarprodukt induziert eine Norm $\|f\|_2 := \Big(\langle f,f\rangle\Big)^{1/2}$, und sie heißt die L_2-Norm.

Beweis: Man prüft die Abgeschlossenheit bei Addition und Skalarmultiplikation in V. Weiter erfüllt das obige definierte Skalarprodukt die Linearität, Symmetrie und positiv Definitheit, denn wenn f stetig und $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$ dann ist $f(x) \equiv 0$. Die Norm erfüllt die postiv Definitheit, Homogenität und Subliearität, denn für $\langle f,g\rangle$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und daher für die L_2-Norm die Dreiecksungleichung.

Definition 5. *Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $f,g \in V$ heißt orthogonal, wenn $\langle f,g\rangle = 0$ gilt. Eine Teilmenge $E \subset V$ heißt Orthonormalsystem(ONS), wenn je zwei verschiedene Elemente von E orthogonal sind und $\|f\| = 1$ für alle $f \in E$.*

Hilfssatz 6. *Sei $e_k(x) := e^{ikx}$, dann bilden $E := \big\{e_k, k \in \mathbb{Z}\big\}$ ein ONS im $C_{2\pi}\big(\mathbb{R},\mathbb{C}\big)$.*

Beweis: $\langle e_j,e_k\rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_j(x)\overline{e_k(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)x}\mathrm{d}x = \delta_{jk}$

Definition 7. *Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $\big\{e_k, k \in \mathbb{Z}\big\}$ ein ONS in V. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $E_N := span\big\{e_0,\cdots,e_N\big\}$. Der Projektionsoperator* *wird definiert durch*

$$P_n : V \to E_N, \qquad f \mapsto \sum_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k \tag{21}$$

Hilfssatz 8. *Für $f \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:*[5][6]
(a) $\langle f - P_N f, g \rangle = 0, \forall g \in E_N$
(b) $\| f - P_N f \| = \min\limits_{g \in E_N} \| f - g \|$
(c) $\| f - P_N f \|^2 = \| f \|^2 - \sum\limits_{k=0}^{N} | \langle f, e_k \rangle |^2$

Beweis:(a) Für $0 \le j \le N$ ist $\langle f - P_N f, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \sum\limits_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \sum\limits_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle \delta_{kj} = \langle f, e_j \rangle - \langle f, e_j \rangle = 0$, E_N ist ein endlich dimensionaler Vektorraum, daher ist $g = \sum\limits_{j=0}^{N} \lambda_j e_j, \forall g \in E_N$ und die Behauptung folgt aus der Linearität des Skalarprodukts.

(b) Für alle $g \in E_N$ gilt $\| f - g \|^2 = \| (f - P_N f) + (P_N f - g) \|^2 = \| f - P_N f \|^2 + \| P_N f - g \|^2 + 2\mathrm{Re} \langle f - P_N f, P_N f - g \rangle = \| f - P_N f \|^2 + \| P_N f - g \|^2$, dabei ist $P_N f - g \in E_N$ und man kann daher (a) benutzen, so folgt die Behauptung $\| f - P_N f \| \le \| f - g \|, \forall g \in E_N$

(c)$\| f - P_N f \|^2 = \| f \|^2 - 2\mathrm{Re} \langle f, P_N f \rangle + \| P_N f \|^2 = \| f \|^2 - 2\mathrm{Re} \sum\limits_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle \langle f, e_k \rangle + \langle \sum\limits_{j=0}^{N} \langle f, e_j \rangle e_j, \sum\limits_{k=0}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k \rangle = \| f \|^2 - \sum\limits_{k=0}^{N} | \langle f, e_k \rangle |^2 \quad \square$

Hilfssatz 8(b) zeigt, dass $P_N f$ die Bestapproximation von f im Teilraum E_N.Hilfssatz 8(c) gibt den Fehler der Approximation. Wir leiten nun einen wichtigen Satz aus dem Hilfssatz 8(c) her.

Satz 9. (Besselsche Ungleichung)
Für jedes $f \in V$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} | \langle f, e_k \rangle |^2$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{\infty} | \langle f, e_k \rangle |^2 \le \| f \|^2 \tag{22}$$

Beweis: Nach Hilfssatz 8(c) ist $\sum\limits_{k=0}^{N} | \langle f, e_k \rangle |^2 \le \| f \|^2 \qquad \forall N \in \mathbb{N}$,

$|\left\langle f, e_k \right\rangle|^2$ ist nicht negativ, die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{N} |\left\langle f, e_k \right\rangle|^2$ ist beschränkt und monoton wachsend, daher konvergiert die Reihe und es gilt die Abschätzung. □

Bemerkung 10. *Sei f stetig und 2π-periodisch. Nach der Definition 3 und Hilfssatz 6 lassen sich die Fourierkoeffizieten von f darstellen als $c_k = \left\langle f, e_k \right\rangle$ und die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle f, e_k \right\rangle e_k$, wobei $e_k = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$*

Folgerung 11. *Sei f stetig und 2π-periodisch, dann erfüllen ihre Fourierkoeffizieten die Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 \tag{23}$$

Weiter brauchen wir die Approximationseigenschaft der trigonometrischen Polynome.

Definition 12. *Für $N \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion:*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right] \tag{24}$$

reellwertiges Fourierpolynom

Definition 13. *Für $N \in \mathbb{N}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ heißt die Funktion:*

$$T_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \tag{25}$$

komplexwertiges Fourierpolynom

Hilfssatz 14. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige 2π-periodische Funktionen, dann existiert nach dem Approximationssatz eine Folge von reellwertigen Fourierpolynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Siehe [7] Seite 12 Folgerung 4.2

Hilfssatz 15. *Sei $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big)$, dann existiert eine Folge (T_N) von komplexwertigen Fourierpolynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Nach dem Hilfssatz 14 existiert zwei Folgen von reellwertigen Fourierpolynomen (P_N), (Q_N), die jewels gleichmäßig gegen $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ konvergiert. Sei $T_N := P_N + iQ_N$. Aus der Eulerschen Formel ist T_N ein komplexwertiges Fourierpolynom und wegen $\|f - T_N\|_\infty = \|\mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f - P_N - iQ_N\|_\infty \leq \|\mathrm{Re}f - P_N\|_\infty + \|\mathrm{Im}f - Q_N\|_\infty$ konvergiert T_N gegen f gleichmäßig.

Hilfssatz 16. *Sei $g \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big)$, deren Fourierkoeffizienten aller verschwinden. Dann ist $g(x) \equiv 0$.[8]*

Beweis: Nach der Voraussetzung ist $\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, wegen der Linearität des Integrals gilt $\int_0^{2\pi} g(x)T_N(x)\mathrm{d}x = 0$ für jedes Fourierpolynom $T_N(x)$. Nach dem Hilfssatz 15 wählt man eine Folge von Fourierpolynome T_N, die gleichmäßig gegen $\overline{g}$ konvergiert. Wegen $\| |g|^2 - T_N g\|_\infty = \|g(\overline{g} - T_N)\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|\overline{g} - T_N\|_\infty$ und der Beschränkheit von g konvergiert $T_N g$ gleichmäßig gegen $|g|^2$. Wegen der Stabilität des Integrals bei Grenzübergang ist $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty} g(x)T_N(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} g(x)T_N(x)\mathrm{d}x = 0$, da g stetig ist, folgt $g(x) \equiv 0$

Der folgende Hilfssatz zeigt die Eindeutigkeit der Fourierreihe.

Hilfssatz 17. *Sei $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big)$, falls ihre Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, dann stellt ihre Fourierreihe die Funktion dar.*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{26}$$

wobei $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$ die Fourierkoeffizieten von f sind.

Beweis: Sei $g(x) := f(x) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$. Man verwendet den Stabilität des Integrals bei Grenzübergang und berechnet die Fourierkoeffizieten von g,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\Big)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}e^{-ikx}\mathrm{d}x = c_k - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k\delta_{nk} = c_k - c_k = 0 \tag{27}$$

das bedeutet, dass alle Fourierkoeffizienten von g verschwinden. Nach dem Hilfssatz 16 ist $g(x) \equiv 0$ und damit $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ □

Hilfssatz 18. *Sei $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big)$ und zusätzlich zweimal stetig differenzierbar, dann konvergiert ihre Fourierreihe absolut und gleichmäßig.*

Beweis: Für $k \neq 0$ erhält man durch partielle Integration

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{-2\pi ik}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{-2\pi ik}\left[f(x)\mathrm{d}e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2\pi ik}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{28}$$

Noch einmal partielle Integration

$$c_k = \frac{1}{2\pi(ik)^2}\int_0^{2\pi} f''(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

daher ist

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi k^2}\left|\int_0^{2\pi} f''(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2\pi k^2}2\pi\|f''\|_\infty = \frac{\|f''\|_\infty}{k^2}$$

Nach Voraussetzung ist f'' stetig und beschränkt. Dann ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k e^{ikx}\right| \leq |c_0| + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|f''\|_\infty}{k^2}$$

$|c_0| \leq \|f\|_\infty$ ist beschränkt und nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig. □

Die Voraussetzung vom Hilfssatz 18 kann abgeschwächt werden.

Hilfssatz 19. *Sei $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R},\mathbb{C}\big)$ und zusätzlich stetig differenzierbar, dann konvergiert ihre Fourierreihe absolut und gleichmäßig.*

Beweis: Seien c_k die Fourierkoeffizieten von f und d_k von f', nach der Rechnung von (28) ist $c_k = \dfrac{d_k}{ik}$ für alle $k \neq 0$, und nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k e^{ikx}\right| = |c_0| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{1}{n}d_n\right| \leq |c_0| + \sqrt{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|d_k|^2}$$

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert. Nach Voraussetzung ist f' stetig und beschränkt, nach der Besselschen Ungleichung (23) ist $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|d_k|^2 \leq \|f'\|_2^2$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig. □

Definition 20. *Sei $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R},\mathbb{C}\big)$, f heißt stückweise stetig differenzierbar, falls es für $n \in \mathbb{N}$ eine Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 \cdots < \alpha_n = 2\pi$ gibt mit*

(a) $f\big|(\alpha_{j-1},\alpha_j) \in C^1(\alpha_{j-1},\alpha_j)$ *für* $1 \leq j \leq n$

(b) Die Grenzwerte $f'(\alpha_j + 0)$ *und* $f'(\alpha_k + 0)$ *für* $0 \leq j \leq n-1$ *und* $1 \leq k \leq n$

Mit anderen Worten, die Ableitung f' besitzt endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Bemerkung 21. *Der Beweis vom Hilfssatz 19 bleibt richtig, wenn* $f \in C_{2\pi}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}\big)$ *und stückweise stetig differenzierbar.*

Beweis: Die Menge endlicher Punkte ist eine Nullmenge in einem nichtleeren Intervall. Man kann den Wert bei diesen Punkten beliebig ändern, so dass f sich in jedem Teilintervall eine stetig differenzierbare Funktion fortsetzen läßt, weiter benutzt man die Additivität des Integrals.

Nach Hilfssatz 17,19 und Bemerkung 21 haben wir den folgenden zentralen Satz im Vortrag 5.

Satz 22. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine* 2π*-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von* f *absolut und gleichmäßig gegen* f.

Wir leiten die klassische Darstellung der Fourierkoeffizieten (18) (19) her.

Bemerkung 23. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ *lässt sich als ihre Fourierreihe darstellen, dann haben die* f *zwei äquivalente Darstellung*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big) \tag{29}$$

mit
(1) $c_0 = \dfrac{a_0}{2}, c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$
(2) $a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$

Falls $c_{-k} = \overline{c_k}$, *dann ist* f *reellwertig, und es gilt*

$$a_k = 2\mathrm{Re}(c_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

$$b_k = -2\mathrm{Im}(c_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

Beweis: Man benutzt die Eulersche Formel. □

Es sieht aus, dass wir außer der Stetigkeit für die Existenz der Fourierreihe nicht mehr erfodern. Aber es gibt tatsächlich stetige Funktionen, deren Fourierreihe nicht in allen Punkten konvergiert. Bekannt hat Emil du Bois-Reymond (1818-1896) zuerst die Existenz einer überall stetigen Funktion erwiesen, deren Fourierreihe an einer Stelle divergiert. Wir betrachten ein einfaches Beispiel von Leopold Fejér (1880-1959), das er als Student an der Uni Budapest im 7. Semester formuliert hat.

Hilfssatz 24. (Abelsche partielle Summation) Niels Henrik Abel(1802-1829)
Seien $(a_k), (b_k)$ *zwei Folgen und* $A_n := \sum_{i=1}^{k} a_i$. *Dann gilt für jedes* $m > 0$ *und jedes* $n \geq m$ *die Identität*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m \tag{30}$$

Beweis: Siehe [9] Seite 7 Hilfssatz 3.2
Diese Formel sieht aus wie $\sum b \bigtriangleup a = ab - \sum a \bigtriangleup b$, und wir können sie als die diskrete partielle Integration verstehen.

Hilfssatz 25. *Sei* $A_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$, *dann ist* $|A_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

Beweis:

$$|A_n(x)| = \left|\mathrm{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\Big)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right|$$

$$= \left|e^{ix}\right| \left|\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right| \leq \frac{2}{|e^{ix}-1|} = \frac{2}{|e^{ix/2}-e^{-ix/2}|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Hilfssatz 26. *Für jedes* $m > 0$ *und jedes* $n \geq m$ *ist*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2}{m\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \tag{31}$$

Beweis: Man benutzt die Abelsche partielle Summation für $a_k := \sin(kx), b_k := \frac{1}{k}$, dann ist

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} A_k(x)\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) + \frac{A_n(x)}{n+1} - \frac{A_{m-1}(x)}{m}\right|$$

dann benutzt man den Hilfssatz 25 und erhält

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\Big) = \frac{2}{m\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Hilfssatz 27. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq 1 + 2\pi \tag{32}$$

Beweis: Man betrachtet zuerst den Fall $0 < x < \pi$. Man wählt m, so dass $m \leq \frac{1}{x} < m+1$, dann ist

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\sin(kx)}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right|$$

Wegen $\sin(y) \leq y$ für $0 < y \leq 1$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(kx)}{k} \leq \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{kx}{k}\right| = mx = 1$

Nach dem Hilfssatz 26 ist $\displaystyle\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq \frac{2}{(m+1)\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

Wegen $\sin y \geq \dfrac{2}{\pi} y$ für $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ ist $\sin\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{2}{\pi}\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{\pi}$, Ferner gilt $m+1 > \dfrac{1}{x}$, daraus folgt

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq 2\pi$$

Die Funktion $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right|$ ist gerade, deshalb ist die Behauptung auch für $-\pi < x < 0$ richtig. Offensichtlich gilt die Abschätzung für $x = 0, -\pi, \pi$. Dann ist die Behauptung für $-\pi \leq x \leq \pi$ richtig. Wegen der Perioditãt gilt die Behauptung für alle x. □

Hilfssatz 28. *Es gilt die Abschätzung* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log n$

Beweis: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_{1}^{n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log n$

Hilfssatz 29.

$$Q_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\big(\cos(2N-n)x - \cos(2N+n)x\big) \tag{33}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante C mit $|Q_N(x)| \leq C$

Beweis: $\displaystyle Q_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}$, dann benutzt man den Hilfssatz 27.

Bemerkung 30. Beispiel von Fejér[10]

Die unendliche Reihe $\displaystyle f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{2^{k^3}}(x)$ definiert ein stetige 2π-periodische Funktion, deren Fourierreihe im Punkt $x = 0$ divergiert.

Beweis: Nach dem Hilfssatz 29 ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{2^{k^3}}(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k^2}$, Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die unendliche Reihe gleichmäßig und somit $f(x)$ stetig. Wegen der gleichmäßig Konvergenz darf man die Reihe gliedweise integrieren, um die Fourierkoeffizieten zu erhalten. Tatsächlich wurde $f(x)$ schon zur ihrer Fourierreihe entwickelt.

Setze $x = 0$, und nach dem Hilfssatz 28 gilt $\displaystyle\frac{1}{k^2} \sum_{k=1}^{2^{k^3}} \geq \frac{1}{k^2} \log 2^{k^3} = k \log 2 > k$, daher verletzt die Partialsumme der Fourierreihe das Cauchykriterium und somit die Fourierreihe im Punkt $x = 0$ divergiert. $\square$

Literatur

[1] Chen Caisheng: Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Science Press, China, 2008

[2] Ernst Albrecht: Historischer Überblick zur Entstehung der Theorie der Fourierreihen, Proseminar Analysis SS 2007, Universität des Saarlandes

[3] E. Freitag: Vorlesungen über Analysis 1

[4] Timo Dimitriadis: Vortrag 6. Fourierreihen im allgemeineren Fall

[5] S.Böge: Skript, Mathematik für Physiker

[6] H.Amann, J.Escher: Analysis II, zweite Auflage, Birkhäuser, 2006

[7] Gregor Matuschek: Vortrag 4. Der Satz von Stone-Weierstraß

[8] Vortragsbeschreibung von Proseminar Analysis, SS 2009

[9] Dominik Wrazidlo: Vortrag 10. Dirichletreihen im Komplexen

[10] J. Suris, S Schmitz, A. Leutbecher: Übungsblatt 4 von Analysis 2, TUM, 2007