# Konstruktion reeller Zahlen aus rationalen Zahlen

Wir nehmen an, daß der Körper der rationalen Zahlen bekannt ist. Genauer wollen wir annehmen:

Gegeben ist eine Menge $Q$ zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &Q \times Q, \quad (a,b) \longmapsto a+b \quad \text{(Addition gennant)}, \\ &Q \times Q, \quad (a,b) \longmapsto ab \quad \text{(Multiplikation genannt)}, \end{aligned}$$

zusammen mit zwei Teilmengen

$Q_{>0}$ (positive Elemente genannt),
$N$ (natürliche Zahlen genannt).

Dabei sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

I. Körperaxiome,
II. Anordnungsaxiome.

Es werden die üblichen Bezeichnungen 1, 0, $a > b$, $a \geq b$, $a - b$, $a^{-1}$, etc. verwendet.

III. Eigenschaften von $N$:

1) Die Zahl 1 ist in $N$ enthalten und sie ist die kleinste Zahl von $N$.
2) Die Summe $n+m$ von zwei Zahlen aus $N$ ist in $N$ entahlten und im Falle $n > m$ auch $n - m$.
3) Ist $n \in N$ und ist $x \in Q$ ein Element mit $n < x < n+1$, so ist $x$ nicht in $N$ enthalten.
4) Jede nicht leere Teilmenge von $N$ besitzt ein Minimum.
5) Jedes Element von $Q_{>0}$ ist in der Form $a/b$ mit $a, b \in N$ darstellbar.
6) Zu jedem $a \in Q$ existiert ein $n \in N$ mit $n > a$.

Wir wollen zeigen.

*Es gibt einen Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zusammen mit einer Teilmenge $\mathbb{R}_{>0}$, welcher alle Axiome des Körpers der reellen Zahlen **einschließlich des Vollständigkeitsaxioms** erfüllt.*

Außerdem wird eine Abbildung

$$\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

konstruiert, welche folgenden Eigenschaften hat:

a) $\varphi$ ist injektiv.
b) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
c) $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{Q}_{>0}$.

(In $\mathbb{Q} := \varphi(Q)$ wird also genau so gerechnet wie in $Q$, es handelt sich um isomorphe Körper.)

### Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen

**Definition.** *Ein Folge $(a_n)$ von Elementen aus $Q$ heißt Nullfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in Q)$ ein $n_0 \in N$ mit*

$$|a_n| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq n_0$$

*gibt.*

**Definition.** *Ein Folge $(a_n)$ von Elementen aus $Q$ heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in Q)$ ein $n_0 \in N$ mit*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n, m \geq n_0$$

*gibt.*

Bezeichnung:
$\mathcal{N}$ Menge aller Nullfolgen aus $Q$,
$\mathcal{C}$ Menge aller Cauchyfolgen aus $Q$.

Wir werden $\mathbb{R}$ als Faktorgruppe $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ konstruieren, dabei aber den Begriff der Faktorgruppe nicht voraussetzen.

Zunächst sei an den Begriff der Äquivalenzrelation auf einer Menge $M$ erinnert. Es muß für je zwei Elemente $a, b \in M$ erklärt sein, ob sie äquivalent sind oder nicht. Wenn sie äquivalent sind, schreibt man auch $a \sim b$. Es soll gelten:

| | |
|---|---|
| $a \sim a$ | (Reflexivität) |
| $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ | (Symmetrie) |
| $a \sim b,\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ | (Transitivität) |

Man bezeichnet mit

$$[a] := \{x \in M;\ x \sim a\}$$

die Menge aller mit $a$ äquivalenten Elemente. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt (volle) Äquivalenzklasse, falls $A = [a]$ für ein geeignetes $a$ gilt. Es gilt dann $a \in A$ und es gilt auch $A = [b]$ für jedes andere Element $b \in A$. Hieraus folgt, daß zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt sind. Also ist $M$ die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzlassen.

Wir wenden dies auf die Menge $\mathcal{C}$ der Cauchyfolgen an, auf welcher wir folgende Relation einführen:

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow (a_n - b_n) \text{ Nullfolge.}$$

Zunächst einmal muß man nachweisen, daß dies eine Äquivalenzrelation ist: Reflexivität und Symmetrie sind klar, die Transitivität folgt daraus, daß die Summe zweier Nullfolgen eine Nullfolge ist. Wie man dies beweist, sollte aus der Analysis bekannt sein. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge $(a_n)$ mit $[a_n]$ und mit $\mathbb{R}$ die Menge aller Äquivalenzklassen,

$$\mathbb{R} := \{[a_n]; \quad (a_n) \text{ Cauchyfolge in } Q\}.$$

Es gilt also $[a_n] = [b_n]$ genau dann, wenn $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist.

Als nächstes führen wir eine Addition auf $\mathbb{R}$ ein. Die Idee ist es,

$$[a_n] + [b_n] := [a_n + b_n]$$

zu definieren. Dazu muß man sich aber gewärtig sei, daß $(a_n)$, $(b_n)$ lediglich willkürliche Repräsentanten ihrer Äquivalenzklasse sind. Man könnte andere Repräsentanten $(a'_n)$ und $(b'_n)$ nehmen. Dann sind $(a_n - a'_n)$ und $b_n - b'_n)$ Nullfolgen. Da die Summe von Nullfolgen wieder eine Nullfolge sind, folgt, daß auch $(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)$ eine Nullfolge ist. Es folgt $[a_n + b_n] = [a'_n + b'_n]$. Damit ist also obiger Ansatz als unabhängig von der Wahl der Repräsentanten erkannt, die Summe zweier Äquivalenzlassen somit wohldefiniert. Analog definiert man

$$[a_n][b_n] := [a_n b_n].$$

Auch hier muß man sich die Wohldefiniertheit überlegen. Sie folgt leicht aus der Tatsache, daß das Produkt einer Cauchyfolge mit einer Nullfolge wieder eine Nullfolge ist. Hierzu muß man sich überlegen, daß Cauchyfolgen beschränkt sind. Wir verweisen auf die Standardanalysisliteratur.

Als nächstes muß man die Körperaxiome nachweisen. Kommtutativität und Assiziativität sind klar, ebenfalls das Distributivgesetz. Wir untersuchen die Existenz der neutralen Elemente:

Die Gleichung $[a_n] + [x_n] = [a_n]$ besagt gerade, daß $[x_n]$ eine Nullfolge ist. Die Menge der Nullfollgen ist eine volle Äquivalenzklasse, welche beispielsweise durch die Folge $0, 0, \ldots$ repräsentiert werden kann. Halten wir fest:

*Einziges neutrales Element der Addition ist die Klasse der Nullfolgen.*

Ähnlich überlegt man sich:

*Einziges neutrales Element der Multiplikation ist die Klasse der mit* $1, 1, \ldots$ *äquivalenten Folgen.*

Die Existenz des Negativen ist auch klar,

$$-[a_n] = [-a_n].$$

Etwas subtiler is die Existenz des multiplikativen Inversen einer Klasse $[a_n]$, welche nicht das Nullelement ist. Die Folge $(a_n)$ sei also keine Nullfolge. Die naheliegende Idee, die Folge $(a_n^{-1})$ zu betrachten, scheidet zunächst einmal aus, da manche der $a_n$ Null sein können. Dies kann aber nur endlich oft auftreten, denn es gilt:

*Wenn eine Cauchyfolge* $(a_n)$ *keine Nullfolge ist, so können nur endlich viele* $a_n$ *von Null verschieden sein.*

Der Beweis erfolgt mit Standardschlüssen der Analysis: Man schließt indirekt, nimmt also an, daß $a_n = 0$ für unendlich viele $n$ gibt. Man findet dann eine Teilfolge $a_{\nu_n}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \cdots)$, welche nur aus Nullen besteht. Sie nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n_0$ so groß, daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt. Dann gilt insbesondere $|a_n - a_{\nu_n}| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Wegen $a_{\nu_n} = 0$ ist $(a_n)$ somit eine Nullfolge im Widerspruch zur Annahme.

Ist $(a_n)$ eine Cauchyfolge, welche keine Nullfolge ist, so können wir $b_n = a_n^{-1}$ für fast alle $n$ bilden. Setzen wir $b_n = 0$ für die restlichen $n$, so erhalten wir eine Folge $(b_n)$ mit der Eigenschaft $a_n b_n = 1$ für fast alle $n$. Die Klasse $[b_n]$ ist ein multiplikativ Inverses von $[a_n]$, sofern wir nachweisen können, daß $(b_n)$ überhaupt eine Cauchyfolge ist. Dieser Nachweis muß geführt werden!

Man hat hierzu $b_n - b_m$ zu betrachten, wobei man von vornherein annnimmt, daß $n, m$ so groß sind, daß man den endlich vielen Nullen ausweicht, daß also $b_n = a_n^{-1}$ gilt. Dann gilt

$$b_n - b_m = \frac{a_m - a_n}{a_n a_m}.$$

wir müssen den Betrag dieses Ausdrucks nach oben abschätzen. Dazu muß man $|a_n|$ nach unten abschätzen. Offenbar ist es ausreichend, folgendes zu zeigen:

*Zu jeder Cauchfolge $(a_n)$, welche keine Nullfolge ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so daß $|a_n| \geq \epsilon$ für fast alle $n$ gilt.*

Auch dies schließt man indirekt. Die Aussage sei für jedes $\varepsilon$ falsch. Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{\nu_n})$ mit $|a_{\nu_n}| \leq \varepsilon$ für alle $n$. Hieraus in Verbindung mit der Cauchy-Eigenschaft von $(a_n)$ folgt $|a_n| < 2\epsilon$ für fast alle $n$. Da $\varepsilon$ beliebig war, folgt, daß $(a_n)$ eine Nullfolge ist im Widerspruch zur Annahme.

Damit haben wir die Körperaxiome nachgewiesen und wir wenden uns den Anordnungsaxiomen zu. Zunächst einmal ist $\mathbb{R}_{>0}$ zu definieren.

**Definition.** *Eine Cauchyfolge $(a_n)$ heißt positiv, falls es eine positive Zahl $\delta > 0$ gibt, so daß $a_n \geq \delta$ für unendlich viele $n$ gilt.*

Der bereits mehrfach durchgeführte Schluß zeigt:

*Dann gilt sogar $a_n > \delta/2$ für fast alle $n$.*

Hieraus folgt unmittelbar, daß Summe und Produkt positiver Cauchfolgen positiv ist. Als nächstes mache man sich klar, daß mit $(a_n)$ auch jede äquivalente Cauchyfolge positiv ist. Danach definiert man:

*Eine Klasse $[a_n]$ gehört $\mathbb{R}_{>0}$ an, falls ihre Elemente positive Cauchyfolgen sind.*

Wir wissen, daß $\mathbb{R}_{>0}$ gegenüber Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. Zum Nachweis der Anordnungsaxiome bleibt folgendes zu zeigen: Sei weder $(a_n)$ noch $(-a_n)$ positiv, dann ist $(a_n)$ eine Nullfolge. Um dies zu beweisen, betrachten wir ein festes aber beliebiges $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)$ nicht positiv ist, gilt $a_n < \varepsilon$ für fast alle $n$. Da auch $(-a_n)$ nicht positiv ist, gilt sogar $|a_n| < \varepsilon$ für fast alle $n$. Damit ist $(a_n)$ als Nullfolge erkannt.

### Der Nachweis des Vollständigkeitsaxioms

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge. Es ist zu zeigen, daß $M$ eine kleinste obere Schranke hat.

Zunächst einmal geben wir die angekündigte Abbildung

$$\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}.$$

an. Wir ordnen einem Element $a \in Q$ einfach die Klasse der konstanten Folge $a, a, \ldots$ zu. Es ist klar, daß diese Abbildung injektiv ist, mit Addition und Multiplikation verträglich ist und daß $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = Q_{>0}$ gilt. Wir setzen

$$\mathbb{Q} := \varphi(Q), \quad \mathbb{Q}_{>0} := \varphi(Q_{>0}), \quad \mathbb{N} = \varphi(N).$$

Offensichtlich erfüllt $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{N})$ ebenfalls die Eigenschaften I,II,III.

Es gilt das Archimedische Prinzip:

*Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Dies folgt unmittelbar aus der Annahme III,6) sowie der bereits erwähnten Tatsache, daß jede Cauchyfolge in $Q$ durch ein Element aus $Q$ nach oben beschränkt werden kann. Aus dem Archimedischen Prinzip folgert man wie üblich:

*Zu je zwei reellen Zahlen $a < b$ existiert ein Element $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.*

(Der Beweis beginnt so. Man wählt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/(b-a)$.)

Wir kommen nun zum Beweis des Vollständigkeitsaxioms: Wir betrachten eine nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ und wählen ein Element $a \in \mathbb{R}$, welches keine obere Schranke von $M$ ist (etwa $a = \alpha - 1$ mit einem Element $\alpha \in M$, sowie eine obere Schranke $b$. Es gilt $a < b$. Wie üblich verwenden wir die Bezeichnung

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\}.$$

Wir konstruieren nun eine Folge von Intervallen (genauer eine sogenannte Intervallschachtelung

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots.$$

Dazu betrachten wir $c = (a + b)/2$. Wenn $c$ eine obere Schranke von $M$ ist, so setzen wir $[a_1, b_1] = [a, c]$. Wenn aber $c$ keine obere Schranke ist, so setzen wir $[a_2, b_2] = [c, b]$. Iterierte Anwendung dieses Verfahrens liefert eine Intervallschachtelung mit folgenden Eigenschaften:

a) $a_n$ ist keine aber $b_n$ ist eine obere Schranke.
b) $|a_n - b_n| = |a - b|/2^n$.

Wir wählen nun zu in jedem Intervall $[a_n, b_n]$ ein Element $\varphi(C_n)$ mit $C_n \in Q$. Man überlegt sich nun:

1) $(C_n)$ ist eine Cauchfolge und repräsentiert somit ein Element $C \in \mathbb{R}$.
2) $C$ ist kleinste obere Schranke von $M$.

Damit ist dann das Vollständigkeitsaxiom bewiesen.

Der Beweis von 1) ist klar, denn es gilt

$$|C_n - C_m| \leq 2^{-n} \quad \text{für} \quad m \geq n.$$

*Beweis von 2):* Wir zeigen, daß $C$ obere Schranke von $M$ ist. Sei $a \in M$. Es ist $b_n \geq a$ für alle $n$. Hieraus folgt $C = \lim_{n\to\infty} b_n \geq a$.

Es bleibt zu zeigen, daß es keine kleinere obere Schranke gibt. Sei also $D$ irgendeiner obere Schranke, dann gilt $D \geq a_n$ und folgedessen $D \geq \lim_{n\to\infty} a_n = C$.

Damit ist bewiesen, daß $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_{>0})$ ein angeordneter Körper ist, welcher auch vollständig ist.