Proseminar Analysis
Vollständigkeit der reellen Zahlen

Axel Wagner

18. Juli 2009

1 Voraussetzungen

Zunächst wollen wir festhalten, was wir als bekannt voraussetzen:
Es sei $(\mathcal{Q}, +, \cdot)$ der Körper der rationalen Zahlen (und sei $\#\mathcal{Q} \geq 2$) und es sei eine Menge $\mathcal{Q}_+ \subset \mathcal{Q}$ (die positiven rationalen Zahlen) ausgezeichnet, für die gilt:

1. $p, q \in \mathcal{Q}_+ \Rightarrow p + q \in \mathcal{Q}_+ \wedge p \cdot q \in \mathcal{Q}_+$
2. $p \in \mathcal{Q}_+ \Rightarrow -p \notin \mathcal{Q}_+$
3. $p \notin \mathcal{Q}_+ \wedge p \neq 0 \Rightarrow -p \in \mathcal{Q}_+$

In $\mathcal{Q}$ sei eine Menge $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q}$ ausgezeichnet, mit den Eigenschaften

1. $1_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{N}$
2. $n \in \mathcal{N} \Rightarrow n + 1_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{N}$
3. Wenn $M \subset \mathcal{Q}$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, dann gilt $\mathcal{N} \subset M$

Es gelte das **archimedische Prinzip:**

$$\forall q \in \mathcal{Q} : \exists n \in \mathcal{N} : n > q$$

Eine **rationale Folge** sei eine Abbildung

$$(x_n) : \mathcal{N} \to \mathcal{Q}$$

$$n \mapsto x_n$$

Für ein $q \in \mathcal{Q}$ sei (q) die Folge, die konstant q ist.
Eine rationale Folge (x_n) sei eine **Cauchy-Folge**, genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{Q}_+ : \exists N \in \mathcal{N} : \forall n, m \in \mathcal{N}, n, m \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Wir setzen voraus, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) gilt:

$$\exists C \in \mathcal{Q}_+ : \forall n \in \mathcal{N} : |x_n| \leq C$$

Eine rationale Folge (x_n) sei eine **Nullfolge**, genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{Q}_+ : \exists N \in \mathcal{N} : \forall n \in \mathcal{N}, n \geq N : |x_n| < \varepsilon$$

Ausserdem sei die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert, als die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, wobei zwei Folgen genau dann äquivalent sind, wenn die Folge der Differenzen ihrer Elemente eine Nullfolge ist:

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow (x_n - y_n) \text{ Nullfolge}$$

Für die Äquivalenzklasse von (x_n) schreiben wir $[x_n]$.
Weiterhin seien auf $\mathbb{R}$ die Operationen $+$ und $\cdot$ definiert, als Elementweise Addition bzw. Multiplikation der Folgenglieder:

$$[x_n] + [y_n] := [x_n + y_n]$$

$$[x_n] \cdot [y_n] := [x_n \cdot y_n]$$

Wir setzen voraus, dass diese Operationen wohldefiniert sind, und dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ damit ein Körper ist.
Weiterhin zeichnen wir eine Menge $\mathbb{R}_+$ aus, durch

$$[x_n] \in \mathbb{R}_+ :\Longleftrightarrow \exists \delta \in \mathcal{Q}_+ : \exists N \in \mathcal{N} : \forall n \in \mathcal{N}, n \geq N : x_n \geq \delta,$$

nennen dies die positiven reellen Zahlen und setzen voraus, dass für diese Menge gilt:

1. $x, y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}_+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}_+$
2. $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow -x \notin \mathbb{R}_+$
3. $x \notin \mathbb{R}_+ \wedge x \neq 0 \Rightarrow -x \in \mathbb{R}_+$

2 Isomorphe Einbettung von $\mathcal{Q}$

Wir wollen nun $\mathcal{Q}$ isomorph in $\mathbb{R}$ einbetten. Wir suchen also genauer eine Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}$, sodass es eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{Q} \to \mathbb{Q}$$

gibt, mit den Eigenschaften:

1. $\forall p, q \in \mathcal{Q} : \varphi(p) + \varphi(q) = \varphi(p + q)$
2. $\forall p, q \in \mathcal{Q} : \varphi(p) \cdot \varphi(q) = \varphi(p \cdot q)$

3. φ ist bijektiv.

4. $\varphi(1_{\mathcal{Q}}) = 1_{\mathbb{R}}$

5. $\varphi(\mathcal{Q}_+) = \mathbb{Q}_+$

Wir schreiben dafür auch $\mathcal{Q} \cong \mathbb{Q}$
Dazu sei $\mathbb{Q}$ die Menge aller konstanten Cauchyfolgen in $\mathcal{Q}$, also:

$$[x_n] \in \mathbb{Q} :\Longleftrightarrow \exists q \in \mathcal{Q} : [x_n] = [q],$$

Wir setzen ausserdem

$$\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$$

Und wir definieren:

$$\varphi(q) := [q]$$

Wir weisen nun nacheinander die geforderten Eigenschaften nach:

1. $\forall p, q \in \mathcal{Q} : \varphi(p) + \varphi(q) = [p] + [q] = [p + q] = \varphi(p + q)$

2. $\forall p, q \in \mathcal{Q} : \varphi(p) \cdot \varphi(q) = [p] \cdot [q] = [p \cdot q] = \varphi(p \cdot q)$

3. Zunächst ist φ injektiv. Angenommen es ist

$$\varphi(p) = \varphi(q) \Leftrightarrow [p] = [q] \Leftrightarrow [p - q] = [0]$$

Die konstante Folge $(p - q)$ muss also Nullfolge sein:

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{Q}_+ : \exists N \in \mathcal{N} : \forall n \in \mathcal{N}, n \geq N : |p - q| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow p - q = 0 \Leftrightarrow p = q$$

Ausserdem ist φ offensichtlich surjektiv:

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists q \in \mathcal{Q} : x = [q] = \varphi(q)$$

4. Angenommen, es wäre $\varphi(1_{\mathcal{Q}}) = 0_{\mathbb{R}}$. Dann wäre für alle $q \in \mathcal{Q}$:

$$\varphi(q) = \varphi(q \cdot 1_{\mathcal{Q}}) = \varphi(q) \cdot \varphi(1_{\mathcal{Q}}) = 0_{\mathbb{R}}$$

Da es jedoch mehr als ein Element in $\mathcal{Q}$ gibt, widerspricht dies der Injektivität von φ. Es muss also $\varphi(1_{\mathcal{Q}}) \neq 0_{\mathbb{R}}$ gelten, es muss also $\varphi(1_{\mathcal{Q}})$ ein multiplikatives Inverses haben. Es folgt:

$$\varphi(1_{\mathcal{Q}}) = \varphi(1_{\mathcal{Q}} \cdot 1_{\mathcal{Q}}) = \varphi(1_{\mathcal{Q}}) \cdot \varphi(1_{\mathcal{Q}})$$

$$\Rightarrow 1_{\mathbb{R}} = \varphi(1_{\mathcal{Q}})$$

5. Sei $q \in \mathcal{Q}_+$, dann setzen wir $\delta := q$ und es gilt:

$$\exists N \in \mathcal{N} : \forall n \in \mathcal{N}, n \geq N : q \geq \delta \Rightarrow \varphi(q) = [q] \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \varphi(q) \in \mathbb{Q}_+$$

Sei nun $[q] \in \mathbb{Q}_+$. Dann gilt:

$$[q] \in \mathbb{R}_+ \iff \exists \delta \in \mathcal{Q}_+ : \exists N \in \mathcal{N} : \forall n \in \mathcal{N}, n \geq N : q \geq \delta$$

$$\Rightarrow q \geq \delta > 0 \Rightarrow q \in \mathcal{Q}_+$$

Wir definieren zuletzt noch

$$\mathbb{N} := \varphi(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{N} \cong \mathbb{N}$$

Durch die isomorphe Einbettung von $\mathcal{Q}$ in $\mathbb{R}$ haben wir erreicht, dass wir $\mathcal{Q}$ und $\mathbb{Q}$ austauschbar verwenden können. Wir können also immer, wenn $q \in \mathcal{Q}$ gelten soll auch $q \in \mathbb{Q}$ annehmen, indem wir φ^{-1} anwenden und umgekehrt. Alle Aussagen über q bleiben dabei gültig.
Das Gleiche gilt auch für $\mathcal{N}$ und $\mathbb{N}$.

3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wir wollen zeigen, dass das die so konstruierte Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.
Dazu zunächst eine Definition:

Definition 3.1 (Schranke). *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ heisst **obere (untere) Schranke** von M, wenn*

$$\forall x \in M : x \leq C \quad (x \geq C)$$

*Wenn eine obere (untere) Schranke von M existiert, dann heisst M **nach oben (unten) beschränkt**.*

Lemma 3.2 (Archimedisches Prinzip). *Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, mit*

$$x < N$$

Beweis. Sei (x_n) ein Repräsentant von x. Da (x_n) eine Cauchy-Folge ist, können wir ein $C \in \mathbb{Q}$ finden, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq C$$

Da wir in den rationalen Zahlen das archimedische Prinzip vorausgesetzt haben, können wir ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$N > C + 1$$

Dann ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq C < N - 1 \Rightarrow x_n < N - 1$$

$$\Longrightarrow x = [x_n] \leq N - 1 < N$$

□

Satz 3.3 (Vollständigkeitsaxiom). *Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ nach oben (unten) beschränkt. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit*

1. *C ist obere (untere) Schranke von M.*
2. *Ist $C' \in \mathbb{R}$ eine obere (untere) Schranke von M, dann gilt $C' \geq C$ $(C' \leq C)$.*

*Wir nennen C dann das **Supremum (Infimum)** von M und schreiben*

$$C =: \sup(M) \quad (C =: \inf(M))$$

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, $M \neq \emptyset$. Wir konstruieren ein solches C.
Nach dem archimedischen Prinzip existiert ein $b_0 \in \mathbb{Q}$, sodass b_0 obere Schranke von M ist. Denn es existiert nach Vorraussetzung eine obere Schranke $b \in \mathbb{R}$ und wir können $b_0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ wählen, sodass $b_0 > b$ gilt. Dann gilt:

$$\forall x \in M : x \leq b < b_0 \Rightarrow b_0 \text{ obere Schranke von } M$$

Weiterhin existiert nach dem archimedischen Prinzip ein $a_0 \in \mathbb{Q}$, sodass a_0 keine obere Schranke von M ist. Denn wir können ein beliebiges $x \in M$ und $a \in \mathbb{N}$ wählen, sodass

$$a > -x \Rightarrow -a < x$$

gilt. Dann kann $a_0 := -a \in \mathbb{Q}$ keine obere Schranke sein.
Wir definieren uns nun drei Folgen:

$$\begin{aligned}
c_n &:= \tfrac{a_n+b_n}{2} && n = 0,1,2,... \\
a_n &:= \begin{cases} a_{n-1} & \text{falls } c_n \text{ obere Schranke von } M \\ c_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} && n = 1,2,3... \\
b_n &:= \begin{cases} c_{n-1} & \text{falls } c_n \text{ obere Schranke von } M \\ b_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} && n = 1,2,3...
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist dann

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n, b_n \in \mathbb{Q}$$

Ausserdem ist b_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke von M und a_n ist keine.
Weiterhin ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : |b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0|$$

Wir wollen zeigen, dass (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen sind. Es ist für alle $m \geq n$:

$$a_n \leq a_m \leq b_n \Rightarrow 0 \leq a_m - a_n \leq b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$$
$$\Rightarrow \forall m \geq n : |a_n - a_m| \leq 2^{-n}|a_0 - b_0|$$

Analog geht man fürr b_n vor.
Nun ist

$$|b_n - a_n| \to 0 \Rightarrow [a_n] = [b_n] =: C$$

Wir wollen nun nachweisen, dass C die geforderten Eigenschaften hat:

1. $\forall x \in M, n \in \mathbb{N} : x \leq b_n \Rightarrow x \leq [b_n] = C$
2. Sei C' eine obere Schranke. Da a_n für alle n keine obere Schranke ist, muss gelten

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in M : a_n < x_n \leq C' \Rightarrow C = [a_n] \leq C' \qquad \square$$

4 Äquivalente Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms

Wir wollen nun das Vollständigkeitsaxiom umformulieren. Konkret zeigen wir die Äquivalenz von drei verschiedenen Formulierungen. Dafür vergessen wir zunächst einmal unsere Konstruktion der reellen Zahlen.
Wir gehen in diesem Kapitel einzig von dem bekannten angeordneten Körper $\mathcal{Q}$ aus. Ausserdem nehmen wir an, wir haben einen Körper $\mathcal{R}$, welcher angeordnet ist, in dem sich $\mathcal{Q}$ isomorph einbetten lässt und in dem das archimedische Prinzip gilt.
Nun benötigen wir noch ein paar Definitionen:

Definition 4.1 (Konvergenz, Grenzwert)**.** *Eine Folge (x_n) in $\mathcal{R}$ heisst **konvergent**, wenn es eine Zahl $x \in \mathcal{R}$ gibt mit*

$$|x_n - x| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

*x heisst dann **Grenzwert** von (x_n) und wir schreiben auch*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes müsste eigentlich noch gezeigt werden, jedoch setzen wir sie hier als gegeben voraus.

Definition 4.2 (Cauchyfolge)**.** *Eine Folge (x_n) in $\mathcal{R}$ heisst **Cauchy-Folge**, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathcal{N} : \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Satz 4.3. *Sei $\mathcal{R}$ ein angeordneter Körper, in dem das archimedische Prinzip gilt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathcal{R}$ hat eine kleinste obere (größte untere) Schranke.*
2. *Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{R}$. Dann konvergiert (x_n).*
3. *Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen, sodass $a_n \leq b_n$ für alle n und $b_n - a_n \to 0$ gilt. Dann existiert genau ein $x \in \mathcal{R}$ mit $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n.*

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Wir wollen zeigen, dass jede Cauchy-Folge in $\mathcal{R}$ konvergiert.

Sei (x_n) eine Cauchy-folge in $\mathcal{R}$. Wie üblich schliessen wir, dass Cauchy-Folgen beschränkt sind.

Zu jedem $k \in \mathcal{N}$ wählen wir ein minimales $S_k \in \mathcal{N}$, sodass

$$m, n \geq S_k \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{1}{k}$$

und definieren:

$$M_k := \{x_n \mid n \geq S_k\}$$

$$y_k := \sup M_k$$

Dann gilt:

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ...$$

Und damit ist die Folge (y_n) monoton fallend. Ausserdem ist sie beschränkt. Sei

$$y := \inf\{y_n\}_{n \in \mathcal{N}}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Angenommen

$$\forall n \in \mathcal{N} : |y - y_n| = y_n - y \geq \varepsilon$$

dann wäre

$$y' := y + \varepsilon \Rightarrow y_n \geq y', \forall n$$

also wäre y' untere Schranke von $\{y_n\}_{n \in \mathcal{N}}$, was wegen $y' > y$ ein Widerspruch ist. Es existiert also ein $N \in \mathcal{N}$, sodass

$$y_N - y < \varepsilon$$

und da y_N monoton fällt gilt

$$\forall n > N : 0 \leq y_n - y < \varepsilon \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon$$

die Folge (y_n) konvergiert also gegen y.

Es gilt nun

$$\forall a, b \in M_k : |a - b| < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq S_k : |x_n - y_k| \leq \frac{1}{k}$$

Sei nun wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen

$$N > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{N}$$

und nehmen ausserdem an, dass N groß genug ist, dass $|y_N - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \forall n \geq S_N : |x_n - x| &= |x_n - y_N + y_N - x| \\ &\leq \underbrace{|x_n - y_N|}_{\leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|y_N - x|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathcal{R}$, sodass $a_n \leq b_n$ für alle n und $b_n - a_n \to 0$ gilt. Es ist Existenz und Eindeutigkeit eines $x \in \mathcal{R}$ zu zeigen, mit

$$\forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq x \leq b_n$$

Existenz: Angenommen, es ist existiert ein $N \in \mathcal{N}$ mit $a_N = b_N$. Aufgrund der Eigenschaften der Folgen (a_n) und (b_n) muss dann auch $a_n = b_n$ für alle $n > N$ gelten und wir können $x := a_N$ wählen. Da

$$\forall n < N : [a_N, b_N] \subset [a_n, b_n],$$

gilt damit für alle $n \in \mathcal{N}$, dass $a_n \leq x \leq b_n$.

Sei also $b_n > a_n$ für alle n. Dann können wir für alle n ein $x_n \in \mathcal{Q}$ wählen mit $a_n < x_n < b_n$. Dies ist sicherlich eine Cauchyfolge, denn für $m \geq n$ gilt ja

$$|x_n - x_m| \leq |b_n - a_n| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Wir setzen $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da für alle $n \in \mathcal{N}$ gilt, dass $a_n \leq x_n$, muss insbesondere für alle n gelten $a_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n = x$ und analog $x \leq b_n$.

Eindeutigkeit: Angenommen es sind $x, y \in \mathcal{R}$ mit $\forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq x, y \leq b_n$. Dann muss gelten:

$$\forall n \in \mathcal{N} : |x - y| \leq |b_n - a_n|$$

Da jedoch $b_n - a_n \to 0$, muss damit $x = y$ gelten.

(3) $\Rightarrow$ (1) Diesen Beweis haben wir bereits in ähnlicher Form geführt.

Sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen, b_0 eine obere Schranke von M und a_0 keine obere Schranke von M. Sei weiterhin

$$\begin{aligned}
c_n &:= \tfrac{a_n+b_n}{2} && n = 0, 1, 2, ... \\
a_n &:= \begin{cases} a_{n-1} & \text{falls } c_n \text{ obere Schranke von } M \\ c_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} && n = 1, 2, 3... \\
b_n &:= \begin{cases} c_{n-1} & \text{falls } c_n \text{ obere Schranke von } M \\ b_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} && n = 1, 2, 3...
\end{aligned}$$

Nach (3) können wir nun $C \in \mathcal{R}$ wählen mit

$$\forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq C \leq b_n$$

Zunächst zeigen wir, dass C eine obere Schranke ist zu M. Angenommen, es ist $x \in M$, mit $x > C$. Dann muss gelten

$$\forall n \in \mathcal{N} : x \leq b_n$$

da die b_n alles obere Schranken sind. Daraus folgt aber (wegen der Eindeutigkeit von C), dass $x \leq C$ ist.

Sei nun C' eine obere Schranke zu M. Dann muss gelten (da die a_n allesamt keine Schranken sind):

$$\forall n : a_n \leq C'$$

Wegen der Eindeutigkeit von C folgt daraus $C' \geq C$. □

5 Alternative Konstruktionen

Wir wollen nun noch kurz alternative Wege ansprechen, die reellen Zahlen zu konstruieren. Auf Beweise verzichten wir aber.

Definition 5.1. *Eine Teilmenge $M \subset \mathcal{Q}$ heisst* ***dedekindscher Schnitt****, wenn*

1. $M \neq \emptyset, M \neq \mathcal{Q}$
2. $\forall p \in M, q \in \mathcal{Q}, q < p : q \in M$
3. $p \in \mathcal{Q} \wedge [\forall q \in M : q \leq p] \Rightarrow p \notin M$

Wir definieren dann $\mathcal{R}$ als die Menge der dedekindschen Schnitte.
Die Addition wird dann definiert als

$$+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

$$(x, y) \mapsto x + y := \{a + b \mid a \in x, b \in y\}$$

Das neutrale Element der Addition ist dann die Menge der negativen rationalen Zahlen. Wir können $x \in \mathcal{R}$ als positiv definieren, wenn $0 \in x$ ist. Alternativ können wir definieren

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x \subset y$$

Die Multiplikation ist ein wenig komplizierter. Wir definieren:

$$\cdot : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$$

$$x \cdot y := \begin{cases} \{p \in \mathcal{Q} \mid \exists a \in x, b \in y : a, b > 0, p \leq ab\} & \text{für } x, y > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \vee y = 0 \\ -(x \cdot (-y)) & \text{falls } y < 0, x > 0 \\ -((-x) \cdot y) & \text{falls } x < 0, y > 0 \\ (-x) \cdot (-y) & \text{falls } x, y < 0 \end{cases}$$

Das neutrale Element der Multiplikation ist natürlich

$$1 = \{p \in \mathcal{Q} \mid p < 1\}$$

und das Inverse ist

$$x^{-1} = \begin{cases} \{p \in \mathcal{Q} \mid \forall q \in x : pq < 1\} & \text{falls } x > 0 \\ -(-x)^{-1} & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Dabei müssen wir aber, um einen dedekindschen Schnitt zu erhalten das eventuell vorhandene Maximum von x^{-1} entfernen.
Dies definiert einen angeordneten Körper. Wir können $\mathcal{Q}$ isomorph einbetten, indem wir einer rationalen Zahl q den Dedekindschen Schnitt

$$\varphi(q) := \{p \in \mathcal{Q} \mid p < q\}$$

zuordnen.
Diese Konstruktion erfüllt unsere erste Formulierung des Vollständigkeitsaxioms, mit

$$\sup M := \{p \in \mathcal{Q} \mid \exists x \in M : \varphi(p) < x\}$$

für eine nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathcal{R}$.
Die zweite bekannte Konstruktionsmöglichkeit ist die Konstruktion über Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Klassischerweise entspricht dem die zweite Version des Vollständigkeitsaxioms.
Als dritte bekannte Möglichkeit existiert noch die Kostruktion über Intervallschachtelungen:

Definition 5.2. *Eine* ***Intervallschachtelung*** $(a_n|b_n)$ *ist eine Folge von Intervallen*

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ...$$

für die gilt

$$b_0 - a_0 \to 0$$

Damit eine Intervalschachtelung wohldefiniert ist, muss natürlich $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathcal{N}$ gelten.
Wir definieren auf der Menge der Intervallschachtelungen nun eine Äquivalenzrelation

$$(a_n|b_n) \sim (a'_n|b'_n) :\Longleftrightarrow \forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq b'_n \wedge a'_n \leq b_n$$

Bezeichnen die Äquivalenzklasse von $(a_n|b_n)$ mit $[a_n|b_n]$ und definieren $\mathcal{R}$ als die Menge der Äquivlanezklassen von Intervallschachtelungen.
Eine Intervallschachtelung ist positiv, wenn

$$\exists N \in \mathcal{N} : \forall n > N : 0 \in [a_n, b_n]$$

Alternativ könnten wir definieren

$$[a_n|b_n] \leq [a'_n|b'_n] :\Longleftrightarrow a_n \leq b'_n, \forall n$$

Ausserdem definieren wir die Addition durch

$$[a_n|b_n] + [a'_n|b'_n] := [a_n + a'_n|b_n + b'_n]$$

Das neutrale Element ist dann z.B.

$$[0|0]$$

Die Multiplikation definieren wir durch

$$\underbrace{[a_n|b_n]}_{=x} \cdot \underbrace{[a'_n|b'_n]}_{=y} := \begin{cases} [a_n \cdot a'_n|b_n \cdot b'_n] & \text{falls } x, y > 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \\ -(x \cdot (-y)) & \text{falls } x > 0, y < 0 \\ -((-x) \cdot y) & \text{falls } x < 0, y > 0 \\ (-x) \cdot (-y) & \text{falls } x, y < 0 \end{cases}$$

Das neutrale Element ist dann

$$[1|1]$$

Es ist leicht einzusehen, dass bei einer Intervallschachtelung $(a_n|b_n)$ die Folgen (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen sind. Wir können also den für Cauchy-Folgen bekannten Weg gehen, um Folgen (a'_n) und (b'_n) zu finden, sodass

$$(a_n \cdot a'_n) \to 1 \wedge (b_n \cdot b'_n) \to 1$$

Dann ist $[a'_n|b'_n]$ das Inverse zu $[a_n|b_n]$.
Eine Anordnung erhalten wir durch

$$[a_n|b_n] \leq [a'_n|b'_n] :\Longleftrightarrow \forall n \in \mathcal{N} : a_n \leq b'_n$$

Auch auch diesem Weg erhält man einen angeordneten Körper. Dieser erfüllt die dritte Formulierung des Vollständigkeitsaxioms.
Jede dieser drei Konstruktionsmöglichkeiten hat die Erfüllung jeweils einer der Formulierungen für das Vollständigkeitsaxiom zum Ziel. Was wir aber gezeigt haben ist, dass diese drei Konstruktionen tatsächlich zu isomorphen Körpern geführt haben.