Proseminar Analysis, SS 2009

1. Vortrag: Legendrepolynome

Die wichtigsten Eigenschaften der Legendrepolynome sind in einem kurzen Skript (legendre.pdf) in Form einer Übungsaufgabe mit Anleitung zusammengestellt. Diese Skript hat uns freundlicherweise Herr Weselmann zur Verfügung gestellt wird. An diesem sollte man sich zunächst orientieren. Darüber stößt man in Lehrbüchern der Analysis, Physik und Numerik immer wieder auf Legendrepolynome. Auch das Internet kann als Fundgruppe genutzt werden.

2. Vortrag: Bernsteinpolynome

Hierzu gibt es eine ganz brauchbare Internetseite:

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs59/abschnitt1_1.html`

Nicht alles, was dort über Bernsteinpolynome aufgeführt wird, soll vorgetragen werden. Im Hauptteil des Vortrages soll zunächst einmal genau das über Bernsteinpolynome behandelt werden, was man zum Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes braucht. Dessen Beweis ist etwas diffizil und sollte ganz genau behandelt werden. Dennoch ist dies vielleicht zu wenig für eine Sitzung. Daher können noch im Anschluss weitere Eigenschaften der Bernsteinpolynome behandelt werden.

3. Vortrag: Die Binomialreihe

Im Skript Analysis 2 (Freitag) wird in Kapitel V, Hilfssatz 6.3 eine konkrete Folge von Polynomen konstruiert, welche gegen die Knickfunktion $|x|$ im Intervall $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert. Der Beweis benutzt die Binomialreihe und sollte genau vorgeführt werden.

4. Vortrag: Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß Ein Spezialfall

Es handelt sich um einen Spezialfall des allgemeinen Approximationssatzes von Stone-Weierstraß. Dieser wird in voller Allgemeinheit für kompakte metrische Räume X in der Vorlesung Analysis II behandelt werden. Dort wird der Beweis vor allem mit Kompaktheitsargumenten geführt. Im Proseminar soll ein direkter Beweis für $X = [0, 1]$ gegeben werden. Dieser wird recht knapp im

Folgenden dargestellt. Im Vortrag müssen die Details natürlich ausgeführt werden.

Sei $X = [0,1]$. Man betrachtet die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ zusammen mit der Maximumnorm

$$||f|| := \max\{|f(x)|; \quad x \in X\}.$$

Sei $W \subset \mathcal{C}(X)$ eine Teilmenge. Man bezeichne mit $\bar{W}$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in W$ mit $||f - g|| < \varepsilon$.

Alternativ kann man sagen:

Es existiert eine Folgen von Funktionen $f_n \in W$, welche gegen f gleichmäßig konvergiert.

Man kann zeigen:

1) Es gilt $W \subset \bar{W}$.
2) $\bar{\bar{W}} = \bar{W}$.

Eine Teilmenge $W \subset \mathcal{C}(X)$ heißt Untervektorraum, falls die Nullfunktion in W enthalten ist und falls

$$f, g \in W \Longrightarrow f + g \in W, \qquad f \in W,\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow Cf \in W.$$

Man nennt den Untervektorraum eine Unteralgebra, falls die konstanten Funktionen in W enthalten sind und sogar

$$f, g \in W \Longrightarrow fg \in W$$

gilt. Man kann zeigen:

1) Ist W ein Untervektorraum, so auch $\bar{W}$.
2) Ist W eine Unteralgebra, so auch $\bar{W}$.

Eine Menge $W \subset \mathcal{C}(X)$ heißt *punktetrennend,* falls zu je zwei verschiedenen Punkten a, b aus X ein $f \in W$ existiert, so dass $f(a) \neq f(b)$.

Satz von Stone-Weierstrass (Spezialfall). *Sei $W \subset \mathcal{C}(X)$ eine punktetrennende Unteralgebra, so gilt $\bar{W} = \mathcal{C}(X)$.*

Folgerung. *Der übliche Weierstraß'sche Approximationssatz folgt, wenn man für W die Menge der Polynome nimmt.*

Zum Beweis kann man $W = \bar{W}$ annehmen. Dies soll im folgenden geschehen. Im folgenden bezeichne W also stets eine punktetrennende Unteralgebra mit der Eigenschaft $W = \bar{W}$.

Man überlegt sich eine Reihe weitere Eigenschaften von W:

Da man die Funktion $|x|$ auf jedem angeschlossenen Intervall gleichmäßig approximieren kann (dies wollen wir verwenden), gilt

$$f \in W \Longrightarrow |f| \in W.$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ definiert man

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$$

und

$$f^- = f^+ - f.$$

Man kann auch

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$$

schreiben. Beide Funktionen f^+, f^- liegen in $\mathcal{C}(X)$, sind nicht negativ und es gilt $f = f^+ - f^-$.
Sind f, g zwei Funktionen aus W, so definiert man

$$f \vee g(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad f \wedge g(x) := \min\{f(x), g(x)\}.$$

Offenbar gilt

$$f \vee g = f + (g - f)^+, \qquad f \wedge g = f - (g - f)^+.$$

Wir erhalten somit:

$$f, g \in W \Longrightarrow f \vee g,\ f \wedge g \in W.$$

Man kann die Punktetrennungseigenschaft etwas verschärfen. Da konstante Funktionen in W enthalten sind, existiert zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ in $f \in W$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) \neq 0$. Da man noch mit einer Konstanten multiplizieren kann, kann man sogar den Wert $f(b)$ beliebig vorschreiben. Jetzt folgt leicht: Zu zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ und zu zwei vorgegebenen Zahlen A, B existiert $f \in W$ mit $f(a) = A$ und $f(b) = B$.

nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum eigentlichen Beweis des Satzes. Wir geben eine Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ und ein $\varepsilon > 0$ vor: Wir suchen $g \in W$ mit $||f - g|| < \varepsilon$. Der erste entscheidende Schritt des Beweises sagt:

Sei a ein fester Punkt aus X. Es gibt $g \in W$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

1) $g(a) = f(a) - \varepsilon/2$.
2) $g \leq f$.

Zum Beweis betrachtet man die Menge M aller $b \in X$, so dass eine Funktion $g \in W$ mit den Eigenschaften

1) $g(a) = f(a) - \varepsilon/2$.
2) $g(x) < f(x)$ für $x \in [0, b]$.

existiert. Die Behauptung lautet also $b = 1$. Zunächst einmal kann man ein $g \in W$ mit $g(a) = f(a) - \varepsilon/2$ und $g(0) < f(0)$ finden. Aus Stetigkeitsgründen gibt es dann ein $\delta \in [0, 1]$ mit $\delta > 0$, so das $g(x) < f(x)$ fur $x \leq \delta$ gilt. Dieses δ liegt in M. Insbesondere ist M nicht leer und man kann des Supremum ξ von M betrachten. Es gilt $\xi > 0$. Es ist klar, dass M zusammenhängend und somit ein Intervall ist. Es gilt also $M = [0, \xi)$ oder $M = [0, \xi]$. Wir zeigen, dass der erste Fall nicht eintreten kann und betrachten dazu irgendeine Funktion $h \in W$ mit $h(a) = f(a) - \varepsilon/2$ und $h(\xi) = f(\xi) - \varepsilon/2$. Eine solche Funktion existiert (auch, falls zufällig $\xi = a$ sein sollte). Aus Stetigkeitsgründen existiert dann ein b mit $0 < b < \xi$, so dass $h(x) < f(x)$ für $b \leq x \leq \xi$ gilt. Da b in M enthalten ist, existiert eine Funktion $k \in W$ mit $k(a) = f(a) - \varepsilon/2$ und $k(x) < f(x)$ für $x \in [0, b]$. Die Funktion $g = h \wedge k$ liegt in W und hat die gewünschte Eigenschaft. Der selbe Schluss zeigt aber nicht nur $\xi \in M$ sondern sogar $\xi = 1$.

In einem weiteren Schritt zeigt man:

Es gibt $g \in W$ mit

$$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x).$$

(Damit ist man dann fertig, denn es folgt $||f - g|| < \varepsilon$.) Der Beweis geht ähnlich. Man betrachtet die Menge aller $b \in X$, so dass eine Funktion $g \in W$ mit der Eigenschaft

$$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) \quad \text{für} \quad x \in [0, b]$$

existiert. Auch diese Menge hat ein Supremum ξ. Man arbeitet nun mit einer Funktion $h \in W$ mit den Eigenschaften $h(\xi) = f(\xi) - \varepsilon/2$ und $h(x) < f(x)$ für alle $x \in X$. Man wählt dann für ein geeignetes $b < \xi$ ein k, welches die angestrebte Eigenschaft in $[0, b]$ hat und bildet dann $h \vee k$.

Wir wollen eine Variante des Approximationssatzes betrachten. Sei $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{C}(X)$ mit der Eigenschaft $f(0) = f(1)$. Dies ist eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X)$. Wir wollen Unteralgebren W von $\mathcal{P}(X)$ betrachten. offenbar gilt dann $\bar{W} \subset \mathcal{P}(X)$.

Satz von Stone Weierstrass, anderer Spezialfall. *Sei W eine Unteralgebra von $\mathcal{P}(X)$. Zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ mit der Eigenschaft $\{a, b\} \neq \{0, 1\}$ existiere $g \in W$ mit $g(a) \neq g(b)$. Dann gilt*

$$\bar{W} = \mathcal{P}(X).$$

Der Beweis bedarf nur einer geringfügigen Modifikation und wird hier übergangen.

Periodische Funktionen

Wir betrachten sogenannnte Fourierpolynome

$$f(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \big[\alpha_n \sin(2\pi nx) + \beta_n \cos(2\pi nx)\big].$$

Wir fassen sie als Funktionen auf $[0,1]$ auf. Sie liegen in $\mathcal{P}(X)$. Wir behaupten, dass sie eine Unteralgebra bilden. Dies folgt leicht aus den Formeln

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

sowie

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \quad e^{-\mathrm{i}x} = \cos x, \mathrm{i}\sin x$$

in Verbindung mit der Exponentialregel

$$e^{\mathrm{i}(x+y)} = e^{\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}y}.$$

Offenbar haben die Fourierpolynome auch die benötigte Punktetrennungseigenschaft.

Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode eins. Ihre Einschränkung auf $[0,1]$ liegt in $\mathcal{P}(X)$. Damit erhalten wir:

Satz. *Zu jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode eins existiert ein Fourier-Polynom P mit der Eigenschaft*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Anders gesprochen: Es gibt eine Folge von Fourierpolynomen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert.

5. Vortrag: Fourierreihen für glatte Funktionen

Ziel ist der Beweis von

Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Periode 2π. Man definiere*

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-2\pi \mathrm{i} n x} dx \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathrm{i} n x},$$

wobei diese Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

Bevor man man mit dem Beweis beginnt, sollte man an folgendes erinnern. (Man findet dies alles irgendwo im Skript.)

1. Die Funktion f heißt zweimal stetig differenzierbar, wenn dies für ihren Real- und Imaginärteil zutrifft. Es werden nur stetige Funktionen integriert.
2. Das Integral wird ebenfalls durch Aufteilen in Real- und Imaginärteil definiert.
3. Eine Reihe komplexer Zahlen $a_1 + a_2 + \cdots$ heißt konvergent, wenn dies nach Aufteilen in Real- und Imaginärteil der Fall ist. Wie im Reellen gilt: Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz.
4. Die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ ist immer in dem Sinne zu verstehen, dass die beiden Teilreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ getrennt konvergieren. Im selben Sinne sind zusätzliche Bedingungen wie „gleichmäßig" und „absolut" zu lesen. Eine hinreichende Bedingung ist

   $$|a_n| \le \frac{C}{n^2}, \qquad (C \text{ geeignet}).$$

   Damit sollte alles erläutert sein, um die den Aussage des Satzes zu verstehen. Jetzt kommt der Beweis. Man beginnt mit dem Beweis der Konvergenz der Reihe. Dieser folgt aus der Formel

   $$a_n = \frac{1}{-2n^2\pi^3} \int f''(x) e^{2\pi i n x} dx,$$

   welche man durch zweimalige partielle Integration beweist. Hier geht wesentlich ein, dass f zweimal steig differenzierbar ist. Da f'' als stetige Funktion auf $[0, 2\pi]$ beschränkt ist, kann man den Betrag des Integrals durch eine von n unabhängige Konstante abschätzen. Man berücksichtige dabei auch, dass der Exponentialfaktor den Betrag 1 hat

Nachdem die Konvergenz der Reihe geklärt ist, bilde man

$$g(x) = f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

man überlege sich, dass alle Fourierkoeffizienten von g verschwinden. damit reduziert man den Satz auf folgenden

Hilfssatz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit Periode 2π, deren Fourierkoeffizienten aller verschwinden. Dann ist f identisch Null.*

Beweis. Wenn alle Fourierkoeffizienten verschwinden, gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x) P(x) dx = 0$$

für jedes Fourierpolynom P. Man wähle eine Folge von Fourierpolynomen P_n, welche gegen $\bar{f}$ gleichmäßig konvergiert. Eine solche existiert nach dem Approximationssatz. Wegen der Stabilität des Integrals bei Grenzübergang folgt

$$\int f(x)\overline{f(x)}dx = 0.$$

Da f stetig ist, folgt $f(x) = 0$.

6. Vortrag: Fourierreihen im allgemeineren Fall

Dieser Vortrag soll nach dem Skript Analysis I gehalten werden. bei den Vorbereitungen, S.166–S.177 kann man sich kurz fassen. Das Skalarprodukt braucht man nicht unbedingt einzuführen. Man sollte sofort Theorem 1.7 formulieren. Vor dem Beweis sollte man Theorem 1.8 formulieren, in welchem die etwas technische Voraussetzung in Theorem 1.7 durch die griffigere Bedingung der stückweisen Glattheit ersetzt wird. Danach widme man sich dem Beweis von 1.7.

Der Vortrag ist schwerer als der vorhergehende.

7. Vortrag: Bernoullipolynome und Bernoullizahlen

Buch von Köcher (s.o.): Kapitel VI, §1, 1.–3.

8. Vortrag: Der Satz von Staudt Clausen

Buch von Köcher (s.o.): Kapitel VI, §1, 4. Den kleinen Fermatschen Satz sollte man beweisen.

9. Vortrag: Eine spezielle Fourierreihe (Eulersche Reihe) Spezielle Werte der Riemannschen Zetafunktion

Literatur: Buch von M. Koecher: Klassische elementare Analysis, Kapitel VI, §2, 2. und 3. bis Formel (8).

10. Vortrag: Dirichletreihen im Komplexen

Hier werden echt komplexe Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ definiert, wobei D ein offener Teilbereich der komplexen Ebene ist. Wir werden allerdings nicht die Funktionentheorie voraussetzen und nicht von analytischen Funktionen reden.

Wir reden nur von stetigen Funktionen. Was das ist, ist aus der Vorlesung Analysis II bekannt, da man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren kann. Man muss aus der Analysis II wissen, was es heißt, dass eine Folge solcher Funktionen gleichmäßig konvergiert und dass die Grenzfunktion wieder stetig ist. Untersucht werden Dirichletreihen

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Ein wichtiges Beispiel ist die Riemannsche Zetafunktion (alle $a_n = 1$).

Literatur: Freitag/Busam, Funktionentheorie

Zunächst muss man die korrekte Definition von n^{-s} für komplexe s (aber n reell und positiv) vornehmen. Dazu sollte man nochmals an die komplexe e-Funktion aus Analysis I erinnern und dann

$$n^{-s} := e^{-s \log n}$$

definieren, wobei $\log n$ der gewöhnliceh reelle Logarithmus sei. Danach kommt Definition VII.2.1, wobei stärker als dort der Zusatz „absolut“ betont werden soll, da wir im Verlauf des Vortrags auch nicht absolute Konvergenz betrachten werden. Dann solle *die* Halbebene der absoluten Konvergenz eingeführt werden und mitformuleriert werden, dass die Dirichletreihe stetig in dieser Halbebene ist. Im Falle der Riemannschen Zetafunktion ist die Halbebene der absoluten Konvergenz durch $\operatorname{Re} s > 1$ gegeben.

Jetzt wendet man sich der nicht notwendig absoluten Konvergenz zu. Hierzu gibt es eine Übungsaufabge in Kapitel VII (Aufgabe 1 zu §2). Die Aussage soll als Satz formuliert werden. man sollte die Stetigkeit in diesem Satz mitformulieren. Der Beweis findet sich im Lösungsteil des Buches. Dabei wird man noch auf die Abelsche partielle Summation dirigiert, welche in Kapitel I, §2 als Aufgabe 13 behandelt wird.

11. Vortrag: Fortsetzung der Zetafunktion

Man zeige, dass für die Riemannsche Zetafunktion die Konvergenzhalbebene der absoluten und gewöhnlichen Konvergenz übereinstimmen ($\operatorname{Re} s > 0$).

Man zeige, dass dies für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$$

nicht der Fall ist. Die beiden Konvergenzhalbebenen sind $\operatorname{Re} s > 1$ und $\operatorname{Re} s > 0$.

Dann gehe man an die Aufgabe 2 aus §5 in Kapitel VII. Dort werden zwei Funktionen $P(s)$ und $Q(s)$ engeführt. Beide sind durch Dirichletreihen definiert, welche für $\operatorname{Re} s > 0$ konvergieren und dort stetige Funktionen darstellen. Auf Grund der Herleitung gilt

$$(1 - 3^{1-s})P(s) = (1 - 2^{1-s})Q(s) \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Man muss mit den Reihen etwas herumrechnen, um zu zeigen, dass diese Identität sogar für $\operatorname{Re} s > 0$ gilt. Damit bekommt man für $\zeta(s)$ zwei verschiedene stetige Fortsetzungen in den Bereich $\operatorname{Re} s > 0$, wobei einmal die Punkte mit $2^{1-s} = 1$ und zum anderen die Punkte mit $3^{1-s} = 1$ herausgenommen werden müssen. Beides sind abgeschlossene Teilmengen. Es handelt sich zum einen die Punkte $s = 2\pi \mathrm{i} n/\log 2$, zum anderen die Punkte $s = 2\pi \mathrm{i} m/\log 3$, wobei n und m jeweils beliebige ganze Zahlen sind. Man muss sich nun überlegen, dass gemeinsamer Ausnahmepunkt lediglich der Punkt $s = 1$ ist. Dadurch erhält man eine wohldefinierte stetige Fortsetzung von $\zeta(s)$ in den Bereich $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$. Diese Fortsetzung bezeichnet man ebenfalls mit $\zeta(s)$. (Man stütze sich auf folgenden einfache Bemerkung: Sind $f_i : D_i \to \mathbb{C}$, $i = 0, 1$, zwei stetige Funktionen auf offenen Teilen der Ebene, welche im Durchschnitt $D_1 \cap D_2$ übereinstimmen, so gibt es eine stetige Funktione $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ mit $f|D_i = f_i$.)

Die Rechtfertigung der Bezeichnung gibt sich in Wahrheit daraus, dass die Fortsetzung sogar analytisch im Sinne der Funktionentheorie und daraus, dass derartige analytische Fortsetzungen nach einem allgemeinen Satz der Funktionentheorie eindeutig sind.

Danach erwähne man den Satz, dass $\zeta(s)$ auf $\operatorname{Re} s = 1$ keine Nullstelle hat und erwähne, dass hieraus der Primzahlsatz folgt. Jetzt sollte man noch die Riemannsche Vermutung formulieren.

12. Vortrag: Transzendenz von e

Lehrbuch Spivak: Calculus

13. Vortrag: Die Konstruktion der reellen Zahlen I

Skript liegt vor. Es soll in zwei Vorträge aufgeteilt werden.

14. Vortrag: Die Konstruktion der reellen Zahlen II

s. vorhergehender Vortrag.