Legendre Polynome

Sei $\mathbb{R}[X]$ der Raum der Polynomfunktionen. Die Legendre Polynome $P_n \in \mathbb{R}[X]$ sind definiert durch

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2 - 1 \right)^n \right).$$

(a) P_n hat genau n paarweise verschiedene Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$.

(b) Die Abbildung S bildet $\mathbb{R}[X]$ in sich ab und ist definiert durch

$$SP(X) \quad = \quad (x^2 - 1) \cdot P''(x) + 2x \cdot P'(x).$$

Es gilt: $SP_n = n(n+1) \cdot P_n$.

(c) Es gilt für beliebige Polynomfunktionen $Q_1(x), Q_2(x)$, dass

$$\int_{-1}^{1} SQ_1(x) \cdot Q_2(x) dx \quad = \quad \int_{-1}^{1} Q_1(x) \cdot SQ_2(x) dx.$$

(d) Es gilt (Orthogonalität) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx \quad = \quad 0$ für $m \neq n$.

Beweisskizze (a) Zunächst zeigt man folgende

Behauptung 1: Für $0 \leq i \leq n$ ist die i-te Ableitung von $(x^2 - 1)^n$ von der Form $P_{i,n}(x) \cdot (x^2 - 1)^{n-i}$ mit einem Polynom $P_{i,n}$.

Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion unter Ausnutzung der Produktregel und der Kettenregel.

Aus der Behauptung 1 folgt sofort die

Behauptung 2: Die i-te Ableitung von $(x^2 - 1)^n$ hat für $0 \leq i \leq n - 1$ bei $x = -1$ und bei $x = 1$ jeweils eine Nullstelle.

Behauptung 3: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$, so gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Das folgt sofort aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Behauptung 4: Für $0 \leq i \leq n$ hat die i-te Ableitung von $(x^2-1)^n$ im Intervall $(-1,1)$ mindestens i Nullstellen.

Auch hier erfolgt der Beweis durch vollständige Induktion: der Fall $i=0$ ist die leere Aussage. Sind für $0 \leq i \leq n-1$ die Zahlen $\xi_1 < \ldots < \xi_i$ Nullstellen der i-ten Ableitung von $(x^2-1)^n$ im offenen Intervall $(-1,1)$), so kann man die Behautung 3 auf jedes der $i+1$ Intervalle $[-1,\xi_1], [\xi_1,\xi_2], \ldots, [\xi_{i-1},\xi_i], [\xi_i,1]$ anwenden, denn nach Behauptung 2 sind auch die Randpunkte -1 und 1 Nullstellen der i-ten Ableitung.

Aus Behauptung 4 folgt, dass P_n im Intervall $(-1,1)$ mindestens n Nullstellen hat. Andererseits hat P_n als n-te Ableitung eines Polynoms vom Grad $2n$ den Grad $2n-n=n$, und ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen.

Es folgt, dass P_n genau n reelle Nullstellen hat und dass diese alle im Intervall $(-1,1)$ liegen. $\square$

(c) Wir müssen zeigen, dass der Ausdruck $\int_{-1}^{1} SQ_1(x)\cdot Q_2(x)dx$ in Q_1 und Q_2 symmetrisch ist. Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} SQ_1(x)\cdot Q_2(x)dx \\
=&\int_{-1}^{1} (x^2-1)\cdot Q_1''(x)\cdot Q_2(x)dx + \int_{-1}^{1} 2x\cdot Q_1'(x)\cdot Q_2(x)dx \\
=&\left[\left((x^2-1)\cdot Q_1'(x)\cdot Q_2(x)\right)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q_1'(x)\cdot\frac{d}{dx}\left((x^2-1)Q_2(x)\right)dx \\
&\qquad + \int_{-1}^{1} 2x\cdot Q_1'(x)\cdot Q_2(x)dx \\
=&0 - \int_{-1}^{1} Q_1'(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q_2'(x)dx - \int_{-1}^{1} Q_1'(x)\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)\cdot Q_2(x)dx \\
&\qquad + \int_{-1}^{1} Q_1'(x)\cdot 2x\cdot Q_2(x)dx \\
=&-\int_{-1}^{1} Q_1'(x)\cdot(x^2-1)\cdot Q_2'(x)dx,
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist symmetrisch in Q_1 und Q_2. $\square$

(d) Da die Behauptung in n und m symmetrisch ist, können wir o.B.d.A $n > m$ voraussetzen. Da wir die Konstanten ignorieren können, müssen wir zeigen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m = 0.$$

Das geht mit partieller Integration: die n Ableitungen des Polynoms $(x^2-1)^n$ werden zum Polynom $(x^2-1)^m$ rübergeschaufelt.

Wegen der Behauptung 2 aus Teil (a) sind die Randterme dabei gleich 0, so dass sich für das Integral nach i Schritten ergibt:

$$(-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(x^2-1)^{n-i} \cdot \frac{d^{m+i}}{dx^{m+i}}(x^2-1)^m dx.$$

Für $i := m+1 \leq n$ wird die $m+i$-te Ableitung von $(x^2-1)^m$ allerdings zu Null, woraus die Behauptung folgt. $\square$

(b) Eine Beweismöglichkeit besteht hier im Nachrechnen: Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(x^2-1)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{2k} \cdot (-1)^{n-k},$$

und deshalb ist

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k \text{ mit } n \leq 2k \leq 2n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{2k-n} \cdot \frac{(2k)!}{(2k-n)!}$$

Die Abbildung S ist nun Summe der drei Abbildungen:

$$S_1 : P(x) \mapsto x^2 \cdot P''(x), \quad S_2 : P(x) \mapsto -P''(x) \text{ und } S_3 : P(x) \mapsto 2xP'(x).$$

Diese Abbildungen sind linear, und es gilt $S_1(x^{2k-n}) = (2k-n)\cdot(2k-n-1)\cdot x^{2k-n}$ sowie $S_3(x^{2k-n}) = 2\cdot(2k-n)\cdot x^{2k-n}$. Beim Berechnen der Wirkung von S_2 muss man die ganze Summe betrachten und danach den Index k durch $k+1$ ersetzen:

$$S_2 P_n(x) \;=\; -\frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k \text{ mit } n+2 \leq 2k \leq 2n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{2k-n} \cdot \frac{(2k)!}{(2k-n-2)!}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k \text{ mit } n+2 \le 2(k+1) \le 2n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot x^{2k-n} \cdot \frac{(2k+2)!}{(2k-n)!}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \cdot \sum_{k \text{ mit } n+2 \le 2(k+1) \le 2n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{2k-n} \cdot \frac{(2k)!}{(2k-n)!} \cdot (2k+1)(2n-2k)$$

Die einzelnen Summanden reproduzieren sich also mit dem Faktor $(2k+1) \cdot (2n-2k)$. Man kann die Summationsbedingung $n+2 \le 2(k+1) \le 2n$ wieder durch $n \le 2k \le 2n$ ersetzen, weil im Fall $k = n$ der Faktor $(2n-2k)$ ohnehin verschwindet.

Für die Abbildung S bedeutet dies, dass sich der Summand mit x^{2k-n} mit dem Faktor

$$((2k-n)(2k-n-1) + 2(2k-n) + (2k+1)(2n-2k)) = (n+1)n$$

reproduziert. Daraus folgt:

$$SP_n(x) \quad = \quad (n+1)n \cdot P_n(x).$$

□

Es gibt auch **alternative Beweise**, die weniger Rechenaufwand erfordern. Man kann z.B. schnell einsehen, dass S auf dem Vektorraum V_n der Polynome vom Grad $\le n$ den Eigenwert $n(n+1)$ hat mit einem Eigenvektor, der nicht im Raum V_{n-1} liegt.

Dann kann man mit Hilfe der Eigenschaften (c) und (d) ohne Rechenaufwand beweisen, dass P_n ein zugehöriger Eigenvektor ist (Theorie der selbstadjungierten linearen Abbildungen in einem Vektorraum mit Skalarprodukt).

Ein **weiterer Alternativbeweis** funktioniert so:

Aus der Kettenregel folgt sofort:

$$(*) \qquad (x^2-1) \cdot \frac{d}{dx}\left((x^2-1)^n\right) \quad = \quad 2xn \cdot (x^2-1)^n.$$

Man kann jetzt von dieser Formel die $(n+1)$-te Ableitung berechnen, indem man die verallgemeinerte Produktregel anwendet:

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{d^i}{dx^i}(f) \cdot \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(g).$$

Diese Formel folgt mit Hilfe von vollständiger Induktion aus der Produktregel und den Additionsregeln für Binomialkoeffizienten (Aufgabe 19(a)) analog zum Beweis von Aufgabe 19(b).

Die $(n+1)$-te Ableitung der linken Seite von (*) ist (man beachte, dass die dritte Ableitung von x^2-1 und alle höheren Ableitungen verschwinden):

$$(x^2-1)\cdot\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\big((x^2-1)^n\big)+(n+1)\cdot 2x\cdot\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big((x^2-1)^n\big)$$
$$+\frac{(n+1)n}{2}\cdot 2\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)\,.$$

Die $(n+1)$-te Ableitung der rechten Seite von (*) berechnet sich analog:

$$2xn\cdot\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big((x^2-1)^n\big)+(n+1)\cdot 2n\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2-1)^n\big)\,.$$

Ein Vergleich der beiden Seiten liefert nach Kürzen gleicher Terme und anschließender Division durch $2^n\cdot n!$ die Identität:

$$(x^2-1)\cdot P_n''(x)+2x\cdot P_n'(x)=(n+1)n\cdot P_n(x).$$

□

Bemerkung: Die Legendre-Polynome spielen in der Physik (einschließlich Quantenchemie) eine wichtige Rolle, z.B. bei der quantenmechanischen Behandlung von rotationssymmetrischen Potentialen.

Bemerkung: Eine weitere Quelle ist das Buch von Mary L. Boas "Mathematical Methods in the Physical Sciences", S.485 - 501. Wie genau man seinen Vortrag aufbaut, ist freigestellt. Man könnte die Legendre Polynome auch einführen, indem man den Gram-Schmidt Algorithmus auf die Basis 1, X, X^2, … anwendet. Normalisiert man die entstehenden Polynome noch richtig, erhält man die Legendre Polynome. Dann müßte die sogenannte Rodriguezformel, die bei uns (s.o.) zur Definition der L.P. benutzt wird, gezeigt werden.