RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Dirichletreihen im Komplexen

Dominik Wrazidlo

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. E. Freitag)

Zusammenfassung: Gegenstand dieser Ausarbeitung ist die Untersuchung von (gewöhnlichen) Dirichletreihen. Diese Reihen sind für komplexen Zahlen definiert und stellen somit in offenen Teilmengen der komplexen Ebene, in denen sie konvergieren, echt komplexe Funktionen dar.
Hauptsächlich wird untersucht, was sich über die Konvergenz solcher Reihen aussagen lässt. Dabei muss zwischen der *absoluten* und der nicht notwendigerweise absoluten (also *bedingten*) Konvergenz unterschieden werden. In beiden Fällen stößt man auf eine offene *rechte Halbebene der Konvergenz* (sofern die Reihe überhaupt irgendwo konvergiert), welche auch zur ganzen komplexen Ebene entarten kann. Wie gezeigt wird, impliziert die Existenz der einen Halbebene der Konvergenz immer auch die Existenz der anderen. Im Allgemeinen werden die beiden Halbebenen *nicht* übereinstimmen, doch für die beiden Konvergenzabszissen σ_0 und σ_1 lässt sich immerhin zeigen: $\sigma_0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_0 - 1$. Das wichtigste Resultat wird die Aussage sein, dass eine Dirichletreihe in jeder ihrer beiden Halbebenen der Konvergenz eine *stetige* Funktion darstellt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung: Dirichletreihen $D(s)$

Den Einstieg übernimmt die einleitende

1.1 Definition. *Eine Reihe der Form*

$$D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},\ s \in \mathbb{C},$$

für eine vorgegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt (gewöhnliche) Dirichletreihe.

Um mit Reihen der Form $D(s)$ arbeiten zu können, muss man zunächst klarstellen, wie Ausdrücke der Form n^{-s} mit $n > 0, s \in \mathbb{C}$ zu verstehen sind. Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ ist bekanntlich

$$a^b := \exp(b \cdot \log(a)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(b \cdot \log(a))^i}{i!} \tag{1.1}$$

definiert. Da die Exponentialreihe sogar für beliebige komplexe Argumente konvergiert, darf man für $a > 0, z \in \mathbb{C}$ problemlos definieren:

$$a^z := \exp(z \cdot \log(a)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z \cdot \log(a))^i}{i!}, \tag{1.2}$$

und hat damit den für den Exponenten erlaubten Zahlbereich von den reellen auf die komplexen Zahlen erweitert. Der Cauchysche Multiplikationssatz liefert nun folgende Regel, die bisher nur für reelle Exponenten zur Vefügung stand:

$$a^{w+z} = a^w a^z \qquad \forall\, w, z \in \mathbb{C},\ a > 0. \tag{1.3}$$

Von Interesse ist nun die Frage nach dem *Konvergenzverhalten* einer Dirichletreihe $D(s)$. In der Theorie der Potenzreihen ist man vor ein analoges Problem gestellt. Dort ergibt sich folgendes wichtiges Resultat:

1.2 Satz. *Sei*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ x \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe für eine vorgegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen und r ihr Konvergenzradius. Dann gilt:

1. *$P(x)$ konvergiert **absolut** für $|x| < r$.*
2. *Im Fall $|x| > r$ $(r < \infty)$ konvergiert $P(x)$* nicht.
3. *Für jedes $0 \leq \delta < r$ konvergiert $P(x)$ im Intervall $[-\delta, \delta]$ **gleichmäßig**.*
4. *$P(x)$ ist stetig auf $(-r, r)$.*

Über den Rand des Konvergenzintervalls $(-r, r)$ ist dabei keine allgemeingültige Aussage möglich. Die kommenden Abschnitte werden zeigen, dass man im Falle von Dirichletreihen zu vergleichbaren Ergebnissen gelangen kann.

2 Die Halbebene A_D der ***absoluten*** Konvergenz

Aus $D(s)$ erhält man die RIEMANNsche Zetafunktion, eine sehr spezielle und enorm wichtige Dirichletreihe, indem man $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzt:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \; s \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Beispielsweise gilt:

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(harmonische Reihe, konvergiert } \textit{nicht}\text{)}, \tag{2.2}$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(konvergiert } \textit{absolut}\text{)}. \tag{2.3}$$

Es lohnt sich, die absolute Konvergenz einer Dirichletreihe genauer zu untersuchen:

2.1 Definition. *Eine Dirichletreihe $D(s)$ heißt (irgendwo)* ***absolut konvergent****, falls eine komplexe Zahl s_0 existiert, sodass die aus den Beträgen der allgemeinen Glieder von $D(s_0)$ gebildete Reihe,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n n^{-s_0}\right|,$$

in bekannter Weise (als Reihe reeller Zahlen) konvergiert.

Bei Kenntnis einer komplexen Zahl s_0, für die die Reihe $D(s_0)$ absolut konvergiert, gilt folgender für die weiteren Argumente in diesem Abschnitt unverzichtbarer Sachverhalt:

2.2 Lemma. *Wenn eine Dirichletreihe $D(s)$ in $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, so konvergiert sie in der gesamten offenen rechten Halbebene*

$$H(s_0) := \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\}$$

absolut.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|a_n n^{-s}\right| \\
&= |a_n| \cdot \left|n^{-s}\right| \\
&= |a_n| \cdot \left|n^{-(\operatorname{Re}(s)+i\cdot\operatorname{Im}(s))}\right| \\
&= |a_n| \cdot \left|n^{-\operatorname{Re}(s)}\right| \cdot \left|\exp\left(-i\cdot\operatorname{Im}(s)\cdot\log(n)\right)\right| && \text{(wegen (1.3))} \\
&= |a_n| \cdot n^{-\operatorname{Re}(s)}. && (\forall r \in \mathbb{R}:\ |\exp(i\cdot r)| = 1)
\end{aligned}$$

Offensichtlich hängt der Betrag des allgemeinen Gliedes in der Reihe $D(s)$ nur vom *Realteil* der eigesetzten komplexen Zahl s ab. Da bei der absoluten Konvergenz also nur der Vergleich von Realteilen eine Rolle spielt, ist es einleuchtend, dass man eine ganze Halbebene $H(s_0)$ erhalten wird, in der $D(s)$ absolut konvergiert.

Sei $s \in H(s_0)$. Es ist zu zeigen, dass $D(s)$ absolut konvergiert.
$s \in H(s_0)$
$\Rightarrow \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$
$\Rightarrow -\operatorname{Re}(s) < -\operatorname{Re}(s_0)$
$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n^{-\operatorname{Re}(s)} \leq n^{-\operatorname{Re}(s_0)}$
$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \cdot n^{-\operatorname{Re}(s)} \leq |a_n| \cdot n^{-\operatorname{Re}(s_0)}$

$$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \left|a_n \cdot n^{-s}\right| \leq \left|a_n \cdot n^{-s_0}\right|. \tag{2.4}$$

Da $D(s_0)$ nach Voraussetzung absolut konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium für Reihen auch $D(s)$ absolut.
Anmerkung: Der Beweis zeigt sogar die absolute Konvergenz von $D(s)$ für alle komplexen Zahlen s mit $\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}(s_0)$, was aber im Folgenden keine Rolle spielt. ∎

Man bedenke, dass dieses Lemma *keine* Aussage über das Konvergenzverhalten von $D(s)$ für komplexe Zahlen s mit $\operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(s_0)$ macht. Stattdessen ist es sinnvoll, nach der *größten* offenen rechten Halbebene zu fragen, in der $D(s)$ absolut konvergiert:

2.3 Definition. *Eine rechte offene Halbebene*

$$H(\sigma) = \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}(s) > \sigma\},\ \sigma \in \mathbb{R},$$

heißt ***Konvergenzhalbebene*** *(in diesem Abschnitt immer bezüglich der absoluten Konvergenz) einer Dirichletreihe $D(s)$, falls $D(s)$ für alle $s \in H(\sigma)$ absolut konvergiert. Als entartete Fälle sind außerdem $H(-\infty) := \mathbb{C}$ sowie $H(\infty) := \emptyset$ zugelassen.*

Die Vereinigung A_D aller Konvergenzhalbebenen einer Dirichletreihe $D(s)$ heißt ***die*** *Konvergenzhalbebene von $D(s)$ oder die Halbebene der* ***absoluten*** *Konvergenz.*

Es ist leicht einzusehen, dass es sich bei A_D auch um eine Konvergenzhalbebene handelt:

2.4 Bemerkung. *A_D ist selbst wieder eine Konvergenzhalbebene von $D(s)$, und zwar die größte.*

Beweis. In den Fällen $A_D = \mathbb{C}$ und $A_D = \emptyset$ ist dies offensichtlich. Andernfalls ist die Menge

$$\{\sigma \in \mathbb{R};\ H(\sigma) \text{ ist Konvergenzhalbebene von } D(s)\}$$

nichtleer und nach unten beschränkt. Daher existiert

$$\sigma_0 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R};\ H(\sigma) \text{ ist Konvergenzhalbebene von } D(s)\}.$$

Unter Zuhilfenahme von **Lemma 2.2** folgt aus der Infimumseigenschaft von σ_0, dass $H(\sigma)$ für *jedes* $\sigma > \sigma_0$ und für *kein* $\sigma < \sigma_0$ Konvergenzhalbebene von $D(s)$ ist. Folglich ist $A_D = H(\sigma_0)$ eine Konvergenzhalbebene von $D(s)$, und zwar die größte. ∎

Man bezeichnet $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ übrigens auch als die *(absolute) Konvergenzabszisse*. Auf den Punkt gebracht, konvergiert $D(s)$ im Fall $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ für **jedes** komplexe s mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ und für **kein** komplexes s mit $\operatorname{Re}(s) < \sigma_0$ absolut.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass sich im Allgemeinen nichts über das Konvergenzverhalten einer Dirichletreihe $D(s)$ auf dem Rand von A_D aussagen lässt. Analoges gilt bekanntlich auch für die Randpunkte des Konvergenzintervalls einer Potenzreihe. Im Allgemeinen gilt also entgegen der naheliegenden Vermutung:

$$A_D \neq \{s \in \mathbb{C};\ D(s) \text{ konvergiert absolut}\}.$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt gemäß **Lemma 2.2**, dass für die absolute Konvergenzabszisse der RIEMANNschen Zetafunktion gilt:

$$1 \leq \sigma_0 \leq 2.$$

Es lässt sich sogar beweisen, dass $\sigma_0 = 1$ gilt.

Eine Potenzreihe $P(x)$ stellt im Innern ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion dar. Eine ensprechende Aussage lässt sich auch für die Halbebene A_D der absoluten Konvergenz einer Dirichletreihe $D(s)$, in welcher $D(s)$ eine echt komplexe Funktion darstellt, treffen:

2.5 Satz. *Eine Dirichletreihe $D(s)$ ist in ihrer Halbebene $A_D = H(\sigma_0)$ der absoluten Konvergenz **stetig**.*

Beweis. Sei $A_D \neq \emptyset$ und $s_0 \in A_D$. Es ist zu zeigen, dass $D(s)$ in s_0 stetig ist.
Da A_D offen ist, existiert im Fall $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_0 < \mu < \operatorname{Re}(s_0)$ (im Fall $\sigma_0 = -\infty$ genügt $\mu < \operatorname{Re}(s_0)$). Es gilt die Inklusion:

$$s_0 \in H(\mu) \subset A_D. \tag{2.5}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $D(\mu)$ wegen $\mu > \sigma_0$ absolut konvergiert, gilt:

$$\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, m \geq N(\varepsilon):\ \left|\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n n^{-\mu}\right| - \sum_{n=1}^{m} \left|a_n n^{-\mu}\right|\right| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Für alle $m \geq N(\varepsilon)$ und alle $t \in H(\mu)$ gilt nun:
(man beachte, dass $D(t)$ für alle $t \in H(\mu)$ absolut, also erst recht bedingt konvergiert)

$$\begin{aligned}
&\left|\operatorname{Re}(D(t)) - \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n n^{-t}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Re}\left(D(t) - \sum_{n=1}^{m} a_n n^{-t}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Re}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n n^{-t}\right)\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n n^{-t} \right| \qquad \text{(denn } |\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z| \;\forall\, z \in \mathbb{C})$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| a_n n^{-t} \right|$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| a_n n^{-\mu} \right| \qquad \text{(wegen (2.4))}$$
$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n n^{-\mu} \right| - \sum_{n=1}^{m} \left| a_n n^{-\mu} \right| \right| < \varepsilon. \qquad \text{(wegen (2.6))}$$

Seien nun die Funktion f und die Funktionenfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegeben durch:

$$f: \; H(\mu) \to \mathbb{R}, \; t \mapsto \mathrm{Re}\,(D(t)),$$
$$f_m: \; H(\mu) \to \mathbb{R}, \; t \mapsto \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m} a_n n^{-t}\right) \;\forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Das bisher Gezeigte lässt sich dann auch so formulieren:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\forall\, m \geq N(\varepsilon) \;\; \forall\, t \in H(\mu): \; |f(t) - f_m(t)| < \varepsilon.$$

In Worten: Die Funktionenfolge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen die Funktion f. Ausschlaggeben hierfür ist die Tatsache, dass das N logisch nur von ε, nicht aber von t abhängig ist.
Man sieht nun leicht ein, dass die Funktionen aus $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ alle stetig in $s_0 \in H(\mu)$ (2.5) sind. Da die Stetigkeit stabil gegenüber der gleichmäßigen Konvergenz ist, ist somit auch f stetig in s_0.
In analoger Weise lässt sich beweisen, dass auch die Funktion

$$g: \; H(\mu) \to \mathbb{R}, \; t \mapsto \mathrm{Im}\,(D(t))$$

stetig in s_0 ist.
Da die Dirichletreihe $D(s)$ in $H(\mu)$ absolut konvergiert, kann man sich D dort auch als echt komplexe Funktion

$$D: \; H(\mu) \to \mathbb{C}, \; t \mapsto D(t)$$

vorstellen. Dabei ist $H(\mu) \subset \mathbb{C}$ offen. Da die Abbildung, welche jeder komplexen Zahl z das geordnete Paar $(\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z))$ zuordnet, bijektiv ist, lässt sich D auch als eine Funktion

$$D: \; H(\mu) \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto D(t)$$

ansehen, wobei $H(\mu)$ dann als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ aufzufassen ist. Bekanntlich ist D genau dann in $s_0 \in H(\mu)$ stetig, wenn dies für die einzelnen Komponenten f und g zutrifft. Da letzteres schon gezeigt wurde, ist die Stetigkeit von D in s_0 bewiesen. ∎

3 Die Halbebene B_D der *bedingten* Konvergenz

Potenzreihen konvergieren in jedem Punkt im Innern ihres Konvergenzintervalls absolut. Bei Dirichletreihen ist die Situation im Allgemeinen etwas komplizierter: Es kann offene Teilmengen der komplexen Ebene geben, innerhalb derer eine Dirichletreihe zwar bedingt, nicht aber absolut konvergiert.

Völlig analog zu **Definition 2.3** wird hier definiert:

3.1 Definition. *Eine rechte offene Halbebene $H(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, heißt* ***Konvergenzhalbebene*** *(in diesem Abschnitt immer bezüglich der bedingten Konvergenz) einer Dirichletreihe $D(s)$, falls $D(s)$ für alle $s \in H(\sigma)$ bedingt konvergiert. Als entartete Fälle sind außerdem $H(-\infty) := \mathbb{C}$ sowie $H(\infty) := \emptyset$ zugelassen.*

Die Vereinigung B_D aller Konvergenzhalbebenen einer Dirichletreihe $D(s)$ heißt ***die*** *Konvergenzhalbebene von $D(s)$ oder die Halbebene der* ***bedingten*** *Konvergenz.*

Trotz der schwächeren Voraussetzung der bedingten Konvergenz in diesem Abschnitt lassen sich die wesentlichen Ergebnisse für A_D aus dem letzten Abschnitt auf B_D übertragen.

Für die kommenden Überlegungen sind folgende zwei Lemmata nützlich:

3.2 Lemma. *(Abelsche partielle Summation)*
Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Folgen komplexer Zahlen. Sei ferner

$$A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt für alle ganzen Zahlen m, n mit $n \geq m \geq 0$:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i (b_{i+1} - b_i).$$

Beweis. Der Beweis geschieht durch direktes Umformen der rechten in die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
&(A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i \left(b_{i+1} - b_i\right) \\
&= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i b_{i+1} + \sum_{i=m}^{n} A_i b_i \\
&= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i b_{i+1} + \sum_{i=m-1}^{n-1} A_{i+1} b_{i+1} \\
&= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i b_{i+1} + \sum_{i=m-1}^{n-1} \left(A_i + a_{i+1}\right) b_{i+1} \\
&= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i b_{i+1} + \sum_{i=m-1}^{n-1} A_i b_{i+1} + \sum_{i=m-1}^{n-1} a_{i+1} b_{i+1} \\
&= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \left(\sum_{i=m}^{n-1} A_i b_{i+1} + A_n b_{n+1}\right) + \left(\sum_{i=m}^{n-1} A_i b_{i+1} + A_{m-1} b_m\right) + \sum_{i=m}^{n} a_i b_i \\
&= \sum_{i=m}^{n} a_i b_i.
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Leere Summen haben per Konvention den Wert 0, so ist beispielsweise $A_{-1} = 0$. ∎

Es sei angemerkt, dass die Abelsche partielle Summation das diskrete Analogon zur partiellen Integration ist. Ein Beweis lässt sich auch vor dem Hintergrund der diskreten Mathematik führen (siehe Anhang).

3.3 Lemma. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $s \in \mathbb{C}$ und $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 0$. Dann gilt:*

$$\left|m^{-s} - n^{-s}\right| \leq \left|\frac{s}{\sigma}\right| \cdot \left|m^{-\sigma} - n^{-\sigma}\right|.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $m \leq n$. Die folgende Integration mit komplexem Integranden lässt sich problemlos ausführen:

$$s \int_{\log(m)}^{\log(n)} e^{-st} dt = \left[-e^{-st}\right]_{\log(m)}^{\log(n)} = -e^{-s \log n} + e^{-s \log m} = m^{-s} - n^{-s},$$

und also:

$$\left|m^{-s} - n^{-s}\right| = \left| s \int\limits_{\log(m)}^{\log(n)} e^{-st} dt \right| = |s| \cdot \left| \int\limits_{\log(m)}^{\log(n)} e^{-st} dt \right|$$

$$\leq |s| \cdot \int\limits_{\log(m)}^{\log(n)} \left|e^{-st}\right| dt \qquad \text{(denn } \log(m) \leq \log(n)\text{)}$$

$$= |s| \cdot \int\limits_{\log(m)}^{\log(n)} e^{-\sigma t} dt \qquad \left(\text{denn } \left|e^{-st}\right| = e^{-\sigma t}\right)$$

$$= |s| \cdot \left[-\frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\sigma t} \right]_{\log(m)}^{\log(n)} \qquad \text{(erlaubt wegen } \sigma > 0\text{)}$$

$$= |s| \cdot \left[-\frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\sigma \log(n)} + \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\sigma \log(m)} \right] = \frac{|s|}{\sigma} \cdot \left[m^{-\sigma} - n^{-\sigma}\right] =: a.$$

Wegen $\sigma > 0$ ist $m^{\sigma} \leq n^{\sigma}$ und damit $m^{-\sigma} \geq n^{-\sigma}$, also $a \geq 0$.

$$\Rightarrow \left|m^{-s} - n^{-s}\right| = a = |a| = \left|\frac{s}{\sigma}\right| \cdot \left|m^{-\sigma} - n^{-\sigma}\right|.$$

■

Bezüglich der bedingten Konvergenz einer Dirichletreihe $D(s)$ gilt folgendes

3.4 Lemma. *Konvergiert die Dirichletreihe $D(s)$ in $s_1 \in \mathbb{C}$ bedingt, dann gilt:*

1. *$D(s)$ konvergiert in der gesamten Halbebene $H(s_1)$ bedingt (vgl.* ***Lemma 2.2****).*
2. *$D(s)$ ist in der Halbebene $H(s_1)$ stetig.*

Beweis. O.B.d.A. lässt sich annehmen, dass $D(s)$ in $s_1 = 0$ bedingt konvergiert. Dann ist zu zeigen, dass $D(s)$ in ganz $H(0)$ bedingt konvergiert und dort stetig ist.
(Im Zweifelsfall lässt sich nämlich die um s_1 verschobene Reihe

$$D'(s) := D(s_1 + s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(s_1+s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n n^{-s_1}\right] n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n n^{-s}, \ s \in \mathbb{C},$$

betrachten, die mit

$$a'_n := a_n n^{-s_1} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

wieder eine Dirichletreihe darstellt. Dass D in $H(s_1)$ bedingt konvergiert, ist nun gleichbedeutend damit, dass D' in $H(0)$ bedingt konvergiert.)
Da die Reihe $D(0)$ bedingt konvergiert, gilt nach dem Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m \geq N : |A(m,n)| < \varepsilon,\ A(m,n) := \sum_{\mu=m}^{n} a_{\mu}. \tag{3.1}$$

Mit den Bezeichnungen aus **Lemma 3.2** gilt (Abelsche partielle Summation):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i b_i &= (A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m) - \sum_{i=m}^{n} A_i (b_{i+1} - b_i) \\
&= [A(0,n)\, b_{n+1} - A(0,m-1)\, b_m] + \sum_{i=m}^{n} [A(0,m-1) + A(m,i)] \cdot (b_i - b_{i+1}) \\
&= A(0,m-1) \cdot \left[\sum_{i=m}^{n} (b_i - b_{i+1}) - b_m \right] + A(0,n)\, b_{n+1} + \sum_{i=m}^{n} A(m,i)(b_i - b_{i+1}) \\
&= A(0,m-1) \cdot [(b_m - b_{n+1}) - b_m] + A(0,n)\, b_{n+1} + \sum_{i=m}^{n} A(m,i)(b_i - b_{i+1}) \\
&= b_{n+1} [A(0,n) - A(0,m-1)] + \sum_{i=m}^{n} A(m,i)(b_i - b_{i+1}) \\
&= A(m,n)\, b_{n+1} + \sum_{i=m}^{n-1} A(m,i)(b_i - b_{i+1}) + A(m,n)(b_n - b_{n+1}) \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} A(m,i)(b_i - b_{i+1}) + A(m,n)\, b_n.
\end{aligned}
$$

Angewendet auf eine Teilsumme von $D(s)$ erhält man:

$$
S(m,n) := \sum_{\nu=m}^{n} a_\nu \nu^{-s} = \sum_{\nu=m}^{n-1} A(m,\nu) \left(\nu^{-s} - (\nu+1)^{-s} \right) + A(m,n)\, n^{-s}. \tag{3.2}
$$

Sei nun $s \in H(0)$, also $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 0$. Sei ferner ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Cauchy-Kriterium für unendliche Reihen genügt es, zum Beweis der bedingten Konvergenz der Reihe $D(s)$ den Betrag der Summe $S(m,n)$ gegen ε abzuschätzen. Aus (3.1) folgt:

$$
\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq m \geq N : |A(m,n)| < \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma} + 1}. \tag{3.3}
$$

Für alle $n \geq m \geq N$ gilt nun (man beachte $\sigma > 0$):

$$
\begin{aligned}
|S(m,n)| &= \left| \sum_{\nu=m}^{n-1} A(m,\nu)\left(\nu^{-s} - (\nu+1)^{-s}\right) + A(m,n)\, n^{-s} \right| \\
&\leq \sum_{\nu=m}^{n-1} |A(m,\nu)| \cdot \left|\nu^{-s} - (\nu+1)^{-s}\right| + \left|A(m,n)\right| \cdot \left|n^{-s}\right| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\
&< \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\sum_{\nu=m}^{n-1} \left|\nu^{-s} - (\nu+1)^{-s}\right| + \left|n^{-s}\right| \right] && \text{(wegen (3.3))} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\sum_{\nu=m}^{n-1} \left|\nu^{-s} - (\nu+1)^{-s}\right| + 1 \right] && \left(\text{wegen } \left|n^{-s}\right| = n^{-\sigma} \leq 1\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\left|\frac{s}{\sigma}\right| \sum_{\nu=m}^{n-1} \left|\nu^{-\sigma} - (\nu+1)^{-\sigma}\right| + 1 \right] && (\text{wegen } \textbf{Lemma 3.3}) \\
&= \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\frac{|s|}{\sigma} \sum_{\nu=m}^{n-1} \left(\nu^{-\sigma} - (\nu+1)^{-\sigma}\right) + 1 \right] && \left(\text{wegen } \nu^{-\sigma} \geq (\nu+1)^{-\sigma}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\frac{|s|}{\sigma} \cdot \left(m^{-\sigma} - n^{-\sigma}\right) + 1 \right] && \text{(Teleskopsumme)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\frac{|s|}{\sigma}+1} \cdot \left[\frac{|s|}{\sigma} + 1 \right] && \left(\text{da } 0 \leq m^{-\sigma} - n^{-\sigma} \leq 1 - n^{-\sigma} \leq 1\right) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Damit ist Behauptung 1. gezeigt.
In (3.3) hängt das gewählte N logisch nicht nur von ε, sondern im Allgemeinen auch von s ab: Je größer das Verhältnis $\frac{|s|}{\sigma}$ ist, desto kleiner wird die positive Zahl, gegen die man $|A(m,n)|$ abschätzen muss und desto größer muss N im Allgemeinen gewählt werden. Beschränkt man sich jedoch auf eine Teilmenge $T \subset H(0)$, für deren Elemente das Verhältnis $\frac{|z|}{\mathrm{Re}(z)}$ nach oben beschränkt ist, dann lässt sich für das vorgegebene ε *unabhängig* vom gewählten Element aus T ein N wie in (3.3) finden. Da sich offensichtlich zu gegebenem s stets eine solche Teilmenge T finden lässt, folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von Real- und Imaginärteil von D in ganz T, dass D stetig in s ist. ∎

Ausgerüstet mit **Lemma 3.4** lässt sich völlig analog zum vorigen Abschnitt folgern:

3.5 Bemerkung. *B_D ist eine Konvergenzhalbebene von $D(s)$, nämlich die größte.*

Die Konvergenzabszisse der bedingten Konvergenz wird mit σ_1 bezeichnet.

3.6 Satz. *Eine Dirichletreihe $D(s)$ ist in ihrer Halbebene $B_D = H(\sigma_1)$ der bedingten Konvergenz **stetig**.*

4 Beziehungen zwischen den beiden Halbebenen A_D und B_D

Wenn die Reihe $D(s)$ für ein gegebenes komplexes s absolut konvergiert, dann konvergiert sie erst recht bedingt, also gilt:

$$A_D \subset B_D. \tag{4.1}$$

Die in den vorigen beiden Abschnitten getrennt betrachteten Halbebenen A_D und B_D einer gegebenen Dirichletreihe $D(s)$ werden nun durch folgenden Satz zueinander in Beziehung gesetzt:

4.1 Satz. *Für jede Dirichletreihe $D(s)$ gilt:*

1. $\sigma_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sigma_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma_0 - 1 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0$.
2. $\sigma_1 = -\infty \Rightarrow \sigma_0 = -\infty$.
3. $\sigma_1 = \infty \Rightarrow \sigma_0 = \infty$.

Beweis. Für $\sigma_1 = \infty$ ist $B_D = \emptyset$, nach (4.1) also $A_D \subset \emptyset$. Damit ist $A_D = \emptyset$, was $\sigma_0 = \infty$ bedeutet.
Für $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ nehme man zunächst an, dass $D(s)$ für ein gegebenes komplexes s bedingt konvergiert. Dann sind die Folgen der Real- und Imaginärteile der allgemeinen Glieder von $D(s)$ Nullfolgen und sind somit beschränkt. Folglich ist auch die Folge aus den allgemeinen Gliedern von $D(s)$ beschränkt:

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : \; \left|a_n n^{-s}\right| \leq C.$$

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ betrachten wir den Betrag des allgemeinen Glieds von $D(s+1+\varepsilon)$:

$$\left|a_n n^{-(s+1+\varepsilon)}\right| = \left|a_n n^{-s}\right| \cdot \left|n^{-(1+\varepsilon)}\right| \leq C \cdot n^{-(1+\varepsilon)}.$$

Damit ist eine konvergente Majorante für die aus den Beträgen der allgemeinen Glieder von $D(s+1+\varepsilon)$ gebildete Reihe gefunden, denn bekanntlich konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$$

für alle $\alpha > 1$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben wurde, folgt mit Hilfe von **Lemma 2.2**, dass D in ganz $H(s+1)$ absolut konvergiert. Insbesondere folgt: $\sigma_0 = -\infty$ oder $\sigma_0 \leq \sigma_1 + 1$, falls $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Da aber D für kein $s < \sigma_1$ konvergiert, enfällt die Möglichkeit $\sigma_0 = -\infty$ und es gilt $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 \leq \sigma_1 + 1$ und wegen (4.1) außerdem: $\sigma_1 \leq \sigma_0$.
Für $\sigma_1 = -\infty$ konvergiert D nach dem schon Gezeigten für jedes komplexe s in $H(s+1)$ absolut. Daraus folgt direkt $\sigma_0 = -\infty$. ∎

Für die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$ gilt beispielsweise $\sigma_0 = 1$ und $\sigma_1 = 0$.

5 Anhang

Alternativ zu dem auf Seite 8 durchgeführten Beweis für die abelsche partielle Summation lässt sich **Lemma 3.2** auch folgendermaßen herleiten:
Beweis. Alle im Folgenden benutzten Funktionen seien Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{C}$. Wir definieren:

$$\Delta g(k) := g(k+1) - g(k) \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.1}$$

In diesem Zusammenhang heißt g *Stammfunktion* zu einer Funktion f, falls gilt:

$$\Delta g(k) = f(k) \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{5.2}$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt dann:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = g(n+1) - g(m). \tag{5.3}$$

Dies ist durch Einsetzen von (5.2) und (5.1) in die linke Seite von (5.3) und Auswerten der entstehenden Teleskopsumme direkt einzusehen.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta(u(k) \cdot v(k)) \\
&= u(k+1) \cdot v(k+1) - u(k) \cdot v(k) && \text{(wegen (5.1))} \\
&= [u(k+1) \cdot v(k+1) - u(k+1) \cdot v(k)] + [u(k+1) \cdot v(k) - u(k) \cdot v(k)] \\
&= u(k+1) \cdot \Delta v(k) + \Delta u(k) \cdot v(k). && \text{(wegen (5.1))}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m}^{n} \Delta u(k) \cdot v(k) = \sum_{k=m}^{n} \Delta(u(k) \cdot v(k)) - \sum_{k=m}^{n} u(k+1) \cdot \Delta v(k).$$

Mit (5.3) folgt daraus weiter:

$$\sum_{k=m}^{n} \Delta u(k) \cdot v(k) = [u(n+1) \cdot v(n+1) - u(m) \cdot v(m)] - \sum_{k=m}^{n} u(k+1) \cdot \Delta v(k).$$

Die Behauptung folgt nun direkt, indem man $u(k) := A_{k-1}$ und $v(k) := b_k$ setzt. ∎

Literatur

[1] E. Freitag, R. Busam: Funktionentheorie 1; Springer, 2006.

[2] M. Aigner: Diskrete Mathematik; Vieweg, 1993.