Der Satz von Staudt-Clausen

Claudio Heinrich

23. Juni 2009

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. Eberhard Freitag)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Satz von Staudt-Clausen wurde 1840 unabhängig von Thomas Clausen und Carl Georg Christian von Staudt bewiesen.
Thomas Clausen (1801-1885) war dänischer Astronom und Mathematiker. Seine mathematischen Errungenschaften waren oft eher rechnerischer Natur: Neben dem Satz von Staudt-Clausen fand er bereits 1830 eine schnell konvergierende Reihe für $\zeta(3)$. Weiterhin berechnete er π auf 250 Dezimalstellen genau und zerlegte 1854 die sechste Fermat-Zahl $2^{64}+1$ in ihre Primfaktoren 274.177 und 67.280.421.310.721, wobei letzteres die größte damals bekannte Primzahl war.
Carl Georg Christian von Staudt (1798-1869) war Sohn einer Adelsfamilie aus Rothenburg ob der Tauber. Er studierte Mathematik in Göttingen bei Carl Friedrich Gauß. Nach seinem Studium wurde er Professor in Würzburg, Nürnberg und schließlich in Erlangen. Er beschäftigte sich neben den Bernoulli-Zahlen haupsächlich mit Kreisteilung und legte die Grundlagen zu sogenannten projektiven Geometrie.
Beide Mathematiker wurden von Gauß mehrfach gelobt und genossen seine Wertschätzung.
Der Beweis dieses Satzes knüpft an das Thema 'Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen' an. Er belegt einen Zusammenhang zwischen Primzahlen und den Nennern der Bernoullischen Zahlen, den man nach der Herleitung über Bernoulli-Polynome nicht unmittelbar erwarten würde.

2 Der Satz von Staudt-Clausen

Der Satz von Staudt-Clausen besagt:

Satz 2.1 (Satz von Staudt-Clausen). *Sei* $P_{2n} := \{p \mid p \text{ Primzahl}, \ (p-1)|2n\}$ *Dann ist*

$$B_{2n} + \sum_{p \in P_{2n}} \frac{1}{p}$$

eine ganze Zahl.

Daraus folgt direkt ein Korollar, das zeigt, warum der Satz von Staudt-Clausen oft auch Satz über die Nenner der Bernoulli-Zahlen genannt wird:

Korollar 2.2. *Der Nenner von B_{2n} ist genau das Produkt aller Primzahlen aus P_{2n}.*
Oder auch: Sei $B_{2n} = \frac{p_n}{q_n}$, dann gilt

$$q_n = \prod_{p \in P_{2n}} p$$

.

3 Beweis des Korollars

Beweis. Wir nehmen an, der Satz sei bewiesen. Dann ist

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \sum_{p \in P_{2n}} \frac{1}{p} = l_n$$

mit $l_n \in \mathbb{Z}$.
Bringen wir nun $\sum_{p \in P_{2n}} \frac{1}{p}$ auf einen Hauptnenner:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j}{\prod_{p \in P_{2n}} p} = l_n$$

dann gilt für ein beliebiges $p_1 \in P_{2n}$:

$$\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j = \prod_{p \in P_{2n}, p \neq p_1} p + \sum_{i \neq 1} \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j$$

$$p_1 \Bigg| \left(\sum_{i \neq 1} \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j \right), \; p_1 \nmid \left(\prod_{p \in P_{2n}, p \neq p_1} p \right)$$

$$\Rightarrow p_1 \nmid \left(\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j \right)$$

Also sind $\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j$ und $\prod_{p \in P_{2n}} p$ zueinander Teilerfremd.

Betrachten wir nun wieder die Gleichung

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j}{\prod_{p \in P_{2n}} p} = l_n$$

Nacheinander multipliziert mit q_{2n} und $\prod_{p \in P_{2n}} p$ ergibt sich

$$\underbrace{p_{2n}}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{q_{2n} \cdot \sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j}{\prod_{p \in P_{2n}} p} = \underbrace{q_{2n} \cdot l_n}_{\in \mathbb{Z}} \tag{1}$$

$$\frac{p_{2n} \cdot \prod_{p \in P_{2n}} p}{q_{2n}} + \underbrace{\sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\prod_{p \in P_{2n}} p \cdot l_n}_{\in \mathbb{Z}} \tag{2}$$

Aus (1) folgt

$$\frac{q_{2n} \cdot \sum_i \prod_{p_j \in P_{2n}, j \neq i} p_j}{\prod_{p \in P_{2n}} p} \in \mathbb{Z}$$

und somit $\prod_{p \in P_{2n}} p \mid q_{2n}$.

Aber aus (2) folgt gleichzeitig auch

$$\frac{p_{2n} \cdot \prod_{p \in P_{2n}} p}{q_{2n}} \in \mathbb{Z}$$

und somit $q_{2n} \mid \prod_{p \in P_{2n}} p$.

Also gilt:

$$q_{2n} = \prod_{p \in P_{2n}} p$$

□

4 Beispiele

Zur Verdeutlichung hier einige Bernoulli-Zahlen und ihre Nenner.

$2n$	P_{2n}	$\prod_{p\in P_{2n}}$	B_{2n}	$B_{2n}+\sum_{p\in P_{2n}}\frac{1}{p}$
2	$\{2,3\}$	6	$B_2=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{6}{6}=1$
4	$\{2,3,5\}$	30	$B_4=-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{30}{30}=1$
6	$\{2,3,7\}$	42	$B_4=\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{42}{42}=1$
12	$\{2,3,5,7,13\}$	2730	$B_{12}=-\frac{691}{2730}$	-$\frac{691}{2730}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}=\frac{2730}{2730}=1$
16	$\{2,3,5,17\}$	510	$B_{16}=-\frac{3617}{510}$	$-\frac{3617}{510}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}=-\frac{3060}{510}=-6$

5 Voraussetzungen

Wir benötigen die Folgenden 6 Formeln oder Eigenschaften:
Seien $m, M, n, N, r \in \mathbb{N}$,
weiterhin
$P_{2n} := \{p\ prim,\ (p-1)|2n\}$
$P'_{2n} := \{p\ prim,\ (p-1) \not| \ 2n,\ p \leq 2n+1\}$:

$$s_n(N) = \frac{N^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}N^n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n-2k+1} \qquad \text{(I.)}$$

$$s_m(MN) \equiv M \cdot s_m(N) + N \cdot m \cdot s_1(M-1) \cdot s_{m-1}(N) \ \ (mod\ N^2) \qquad \text{(II.)}$$

$$M,\ N\ teilerfremd \Rightarrow \frac{s_m(MN)}{MN} - \frac{s_m(N)}{N} - \frac{s_m(M)}{M} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(III.)}$$

$$s_{2n}(MN) \equiv M \cdot s_{2n}(N) \ \ (mod\ N^2) \qquad \text{(IV.)}$$

$$\frac{s_{2n}(N^r)}{N^r} - \frac{s_{2n}(N)}{N} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(V.)}$$

$$p \in P_{2n} \Rightarrow \frac{s_{2n}(p)}{p} + \frac{1}{p} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(VI.(1))}$$

$$p \in P'_{2n} \Rightarrow \frac{s_{2n}(p)}{p} \in \mathbb{Z} \qquad \text{(VI.(2))}$$

6 Beweis der Voraussetzungen

6.1 Beweis von (I.)

Siehe Vortrag Bernoulli-Polynome und Bernoulli-Zahlen.

6.2 Beweis von (II.)

$$s_m(MN) \equiv M \cdot s_m(N) + N \cdot m \cdot s_1(M-1) \cdot s_{m-1}(N) \pmod{N^2}$$

Beweis. für $r = 0, \cdots, M-1$; $k = 1, \cdots, N$; $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(rN+k)^m &= \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (rN)^l k^{m-l} \\
&= k^m + mrNk^{m-1} + \underbrace{\sum_{l=2}^{m} \binom{m}{l} (rN)^l k^{m-l}}_{\equiv 0 \pmod{N^2}} \\
(rN+k)^m &\equiv k^m + mrNk^{m-1} \pmod{N^2}
\end{aligned}$$

und weiterhin:

$$\begin{aligned}
s_m(MN) &= \sum_{k=1}^{MN} k^m \\
&= \sum_{k=1}^{N} k^m + \sum_{k=N+1}^{2N} k^m + \cdots + \sum_{k=(M-1)N+1}^{MN} k^m \\
&= \sum_{k=1}^{N} (0N+k)^m + \sum_{k=1}^{N} (1N+k)^m + \cdots + \sum_{k=1}^{N} ((M-1)N+k)^m \\
&= \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{k=1}^{N} (rN+k)^m
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{k=1}^{N} k^m + \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{k=1}^{N} mrNk^{m-1} \pmod{N^2} \\
&= \sum_{r=0}^{M-1} s_m(N) + \sum_{r=0}^{M-1} mrNs_{m-1}(N) \\
&= Ms_m(N) + mNs_1(M-1)s_{m-1}(N)
\end{aligned}
$$

□

6.3 Beweis von (III.)

$$M,\ N\ teilerfremd \Rightarrow \frac{s_m(MN)}{MN} - \frac{s_m(N)}{N} - \frac{s_m(M)}{M} \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Aus (II.) folgt:

$$s_m(MN) - Ms_m(N) \equiv Nms_{m-1}(N)s_1(M-1) \pmod{N^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow N \quad | \quad (s_m(MN) - Ms_m(N)) \\
&\Leftrightarrow N \quad | \quad (s_m(MN) - Ms_m(N) + Ns_m(M))
\end{aligned}
$$

Die Rollen von M und N sind vertauschbar:

$$\Rightarrow M \quad | \quad (s_m(MN) - Ms_m(N) + Ns_m(M))$$

M, N teilerfremd:

$$\Rightarrow \quad MN \mid (s_m(MN) - Ms_m(N) + Ns_m(M))$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{s_m(MN)}{MN} - \frac{s_m(N)}{N} + \frac{s_m(M)}{M} \in \mathbb{Z}$$

□

6.4 Beweis von (IV.)

$$s_{2n}(MN) \equiv Ms_{2n}(N) \pmod{N^2}$$

Beweis. Sei $k = 0, \cdots, N$:

$$\begin{aligned}
N \quad & \Big| \quad \left\{ \sum_{l=1}^{2n-1} N^l (-k)^{2n-1-l} \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad \left\{ \sum_{l=1}^{2n-1} N^l (-k)^{2n-1-l} + (-k)^{(2n-1)} + k^{(2n-1)} \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad \left\{ \sum_{l=0}^{2n-1} N^l (-k)^{2n-1-l} + k^{2n-1} \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad \left\{ (N-k)^{2n-1} + k^{2n-1} \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad \left\{ \sum_{k=0}^{N} \left((N-k)^{2n-1} + k^{2n-1} \right) \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^{2n-1} + \sum_{k=1}^{N} k^{2n-1} \right\} \\
\Leftrightarrow N \quad & \Big| \quad 2 \cdot s_{2n-1} N \\
\Leftrightarrow 0 \quad & \equiv \quad 2nNs_{2n-1}(N)s_1(M-1) \pmod{N^2}
\end{aligned}$$

Mit (I.) ergibt sich:

$$s_{2n}(MN) \equiv Ms_{2n}(N) \pmod{N^2}$$

□

6.5 Beweis von (V.)

Sei $r \in \mathbb{N}$.

$$\frac{s_{2n}(N^r)}{N^r} - \frac{s_{2n}(N)}{N} \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$
Setze in (IV.) für $M = N$ und für $N = N^k$ ein:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv s_{2n}(N^{k+1}) - N s_{2n}(N^k) \pmod{N^{2k}} \\
&\Leftrightarrow \frac{s_{2n}(N^{k+1}) - N s_{2n}(N^k)}{N^{2k}} \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{s_{2n}(N^{k+1})}{N^{k+1}} - \frac{s_{2n}(N^k)}{N^k}\right)\frac{1}{N^{k-1}} \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \frac{s_{2n}(N^{k+1})}{N^{k+1}} - \frac{s_{2n}(N^k)}{N^k} \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{r-1}\left(\frac{s_{2n}(N^{k+1})}{N^{k+1}} - \frac{s_{2n}(N^k)}{N^k}\right) \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \frac{s_{2n}(N^r)}{N^r} - \frac{s_{2n}(N)}{N} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

□

6.6 Beweis des kleinen Fermats

Für den Beweis von (VI.(1)) und (VI.(2)) benötigen wir den kleinen Fermatschen Satz:

Satz 6.1 (Kleiner Fermatscher Satz). *Sei $a \in \mathbb{Z}$, p Primzahl, dann gilt:*

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Anmerkung: ist $a \not\equiv 0 \pmod p$, dann gilt auch:

$$\begin{aligned}
a^p - a &\equiv 0 \pmod p \\
\Leftrightarrow a(a^{p-1} - 1) &\equiv 0 \pmod p \\
\underbrace{\Leftrightarrow}_{a \not\equiv 0} a^{p-1} &\equiv 1 \pmod p
\end{aligned}$$

Beweis. Vollständige Induktion nach a:
Induktionsanfang: $a = 0$

$$0^p \equiv 0 \pmod p$$

Induktionsannahme:

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Induktionsschritt:
Schritt von a auf $a+1$:
für $l = 1, \cdots, p-1$:

$$\underbrace{\binom{p}{l}}_{\in\mathbb{N}} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \cdots \cdot (p-l+1)}{l \cdot (l-1) \cdot \cdots \cdot 1}$$

und da p Primzahl ist, gilt $2, ..., l \nmid p$ und somit:

$$\underbrace{\binom{p}{l}}_{\in\mathbb{N}} = p \cdot \underbrace{\frac{(p-1) \cdot \cdots \cdot (p-l+1)}{l \cdot (l-1) \cdot \cdots \cdot 1}}_{\in\mathbb{N}} \equiv 0 \pmod p$$

$$(a+1)^p = \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} a^l = a^p + 1 + \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} a^l \equiv a^p + 1 \underbrace{\equiv}_{I.A.} a + 1 \pmod p$$

Schritt von a auf $a-1$:
$p = 2$:

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \equiv a^2 + 1 \equiv a - 1 \pmod 2$$

$p \neq 2$:

$$\begin{aligned} (a-1)^p &= \sum_{l=0}^{p} \binom{p}{l} (-1)^{p-l} a^l \\ &= a^p + (-1)^p + \sum_{l=1}^{p-1} \binom{p}{l} (-1)^{p-l} a^l \underbrace{\equiv}_{p \text{ ungerade}} a^p - 1 \underbrace{\equiv}_{I.A.} a - 1 \pmod p \end{aligned}$$

□

6.7 Beweis von (VI.(1))

Sei $P_{2n} := \{p\ prim,\ (p-1)|2n\}$:

$$p \in P_{2n} \Rightarrow \frac{s_{2n}(p)}{p} + \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Sei $p \in P_{2n}$. *Sei weiterhin* $k = 1, ..., p-1$:
Nach dem kleinen Fermat gilt:

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

Aus $(p-1) \mid 2n$ *folgt:*

$$\begin{aligned}
2n &= l \cdot (p-1) \quad (mit\ l \in \mathbb{Z}) \\
\Rightarrow k^{2n} = \left(k^{p-1}\right)^l &\equiv 1^l \equiv 1 \pmod p \\
s_{2n}(p) = \sum_{k=1}^{p} k^{2n} &\equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^{2n} \equiv p-1 \pmod p \\
\Rightarrow s_{2n}(p) + 1 &\equiv 0 \pmod p
\end{aligned}$$

□

6.8 Exkurs zu Primitivwurzeln

Sei p eine Primzahl.
Eine Primitivwurzel $q \pmod p$ ist ein Element von $(\mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z})^\times$, sodass sich alle Elemente in $(\mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z})^\times$ als eine Potenz von q darstellen lassen.
Oder anders formuliert:

$$\begin{gathered}
q \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \\
\forall a \in \mathbb{Z}, a \not\equiv 0 \pmod p \ \ \exists k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq p-1 : \\
q^k \equiv a \pmod p
\end{gathered}$$

(Existenz folgt aus einem Satz von Gauß)
Beispiel: 2 ist Primitivwurzel (mod 5):

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \equiv 2 \pmod 5 \\
2^2 &= 4 \equiv 4 \pmod 5 \\
2^3 &= 8 \equiv 3 \pmod 5 \\
2^4 &= 16 \equiv 1 \pmod 5
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin: $q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$
(nach dem kleinen Fermatschen Satz)
und für $k = 1, ..., p-1$ durchläuft q^k alle Elemente aus $\mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z}$:

$$k_1, k_2 \in \mathbb{N}, 1 \le k_1, k_2 \le p-1,$$

$$q^{k_1} \equiv q^{k_2} \pmod p \;\Rightarrow\; k_1 = k_2$$

Beweis. O.b.d.A.: $k_1 \ge k_2$:

$$\begin{aligned} q^{k_1} &\equiv q^{k_2} \pmod p \\ \Leftrightarrow \underbrace{q^{k_2}}_{\neq 0} \cdot (q^{k_1-k_2} - q^0) &\equiv 0 \pmod p \\ \Rightarrow q^{k_1-k_2} &\equiv 1 \pmod p \\ (k_1-k_2) = 0, ..., p-2 \;\Rightarrow\; k_1 - k_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k_1 &= k_2 \end{aligned}$$

□

6.9 Beweis von VI.(2)

$P'_{2n} := \{p \; prim, \; (p-1) \not| \; 2n, \; p \le 2n+1\}$:

$$p \in P'_{2n} \Rightarrow \frac{s_{2n}(p)}{p} \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Sei q Primitivwurzel (mod p).

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; k < p \; \exists k' \in \mathbb{N}, \; k' < p : \; q^{k'} \equiv k \pmod p$$

$$\Rightarrow s_{2n}(p) = \sum_{k=1}^{p} k^{2n} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^{2n} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \left(q^k\right)^{2n} \pmod p$$

Da aber nach dem kleinen Fermat gilt:

$$\begin{aligned}
q^{p-1} &\equiv 1 \quad (mod\ p) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \left(q^k\right)^{2n} &\equiv \sum_{k=0}^{p-2} \left(q^k\right)^{2n} \quad (mod\ p) \\
\Rightarrow q^{2n} \sum_{k=0}^{p-2} \left(q^k\right)^{2n} = \sum_{k=1}^{p-1} \left(q^k\right)^{2n} &\equiv \sum_{k=0}^{p-2} \left(q^k\right)^{2n} \quad (mod\ p) \\
\Rightarrow q^{2n} \cdot s_{2n}(p) &\equiv s_{2n}(p) \quad (mod\ p)
\end{aligned}$$

Da aber $(p-1) \not| \, 2n$ *gilt, gilt auch:*

$\exists\ l, r \in \mathbb{N},\ r < p-1 :$

$$\begin{aligned}
2n &= l(p-1) + r \\
\Rightarrow q^{2n} &= \underbrace{\left(q^{p-1}\right)^l}_{\equiv 1} \cdot \underbrace{q^r}_{\not\equiv 1} \\
\Leftrightarrow q^{2n} &\not\equiv 1 \quad (mod\ p)
\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
q^{2n} \cdot s_{2n}(p) &\equiv s_{2n}(p) \quad (mod\ p) \\
\Rightarrow s_{2n}(p) &\equiv 0 \quad (mod\ p)
\end{aligned}$$

$\square$

6.10 Lemma

Lemma 6.2. *Sei* $P_{2n,N} := \{p \text{ prim},\ (p-1)|2n,\ p\ |N\}$*:*

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} + \sum_{p\in P_{2n,N}} \frac{1}{p}\ \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Betrachte die Primfaktorenzerlegung von N*:*

$$N = \prod_{p|N} p^{\alpha_p}$$

Aus (III.) folgt:

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} - \frac{s_{2n}(p_1^{\alpha_1})}{p_1^{\alpha_1}} - \frac{s_{2n}(\prod_{p|N,p\neq p_1} p^{\alpha_p})}{\prod_{p|N,p\neq p_1} p^{\alpha_p}} \in \mathbb{Z}$$

und durch mehrfaches Anwenden:

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} \in \mathbb{Z}$$

mit (V.):

$$\begin{aligned}
\frac{s_{2n}(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} - \frac{s_{2n}(p)}{p} &\in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} - \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p)}{p} &\in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} + \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p^{\alpha_p})}{p^{\alpha_p}} - \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p)}{p} &\in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p|N} \frac{s_{2n}(p)}{p} &\in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p\in P_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} - \sum_{p\in P'_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

mit $P_{2n,N} := \{p \text{ prim},\ (p-1)|2n,\ p|N\}$ *und*
$P'_{2n,N} := \{p \text{ prim},\ (p-1) \nmid 2n,\ p|N\}$ *definiert wie in (VI.).*

Aus VI.(2) folgt nun:

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} \in \mathbb{Z}$$

Aus VI.(1) folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} + \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} - \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} + & \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{s_{2n}(p)}{p} + \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & \frac{s_{2n}(N)}{N} + \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

7 Beweis des Satzes

$$B_{2n} + \sum_{p \in P_{2n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Aus (I.) folgt:

$$\begin{aligned} s_n(N) &= \frac{N^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2}N^n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{1 \le k \le \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n-2k+1} \\ \Rightarrow \frac{s_n(N)}{N} &= \frac{N^n}{n+1} + \frac{1}{2}N^{n-1} + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{1 \le k \le \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n-2k} \\ \Rightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} &= \frac{N^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{2}N^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{2n-2k} \\ \Rightarrow \frac{s_{2n}(N)}{N} - B_{2n} &= \frac{N^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{2}N^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{2n-2k} \end{aligned}$$

Beweis über vollständige Induktion:
Induktionsanfang:

$$B_0 + \sum_{p \in P_0} \frac{1}{p} = B_0 = 1 \in \mathbb{Z}$$

Induktionsannahme:
Der Satz gilt für B_{2k} $(k = 0, 1, ..., n-1)$

Induktionsschluss:

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} - B_{2n} = \frac{N^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{2}N^{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n+1}{k} \cdot B_{2k} \cdot N^{2n-2k}$$

nun wählt man

$$N = kgV\{2n+1, \prod_{p \;\; prim, p \leq 2n+1} p\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{N^{2n}}{2n+1} \in \mathbb{Z},}_{(2n+1)|N} \; \underbrace{\frac{1}{2}N^{2n-1} \in \mathbb{Z},}_{2|N}$$

$$und \; \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n+1}{k} \cdot B_{2k} \cdot N^{2n-2k} \in \mathbb{Z},$$

denn, da nach Induktionsvoraussetzung und Korollar die Primfaktorenzerlegung aller Nenner der B_{2k} *keine Potenzen* > 1 *enthält, gilt:*

$$N^2 \Big| \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} B_{2k} \right\}$$

Daraus folgt:

$$\frac{s_{2n}(N)}{N} - B_{2n} \in \mathbb{Z}$$

und mit dem Lemma:

$$-\frac{s_{2n}(N)}{N} + B_{2n} + \frac{s_{2n}(N)}{N} + \sum_{p \in P_{2n,N}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow B_{2n} + \sum_{p \in P_{2n}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

(da für alle $p \in P_{2n}$ *durch unsere Wahl von* N *automatisch* $p|N$ *gilt, ist* $P_{2n} = P_{2n,N}$*)* $\square$

Literatur

[1] Max Koecher: Klassische Elementare Analysis. Birkhäuser, 1987.

[2] http://wikipedia.org