RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Der Satz von Stone-Weierstraß

Gregor Matuschek

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis I*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Eberhard Freitag)

Zusammenfassung: Wir kennen bereits den Approximationssatz von Karl Weierstraß, der besgt, dass man jede Funktion auf einem abgeschlossen Intervall durch Polynome approximieren kann. Nun hat sich Marshall Harvey Stone in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gefragt, ob man die stetigen Funktionen auch mit anderen Familien von Funktionen annähern könnte, und falls ja, welche Eigenschaften diese erfüllen müssen. Er hat sogar den Satz von Weierstraß insofern erweitert, dass es nun möglich war, auch Funktionen auf beliebigen kompakten metrischen Räumen auf ähnliche Weise zu approximieren. In meinem Vortrag werde ich allerdings nicht so weit gehen und nur die stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen betrachten, denn für diese ist der Satz von Stone-Weierstraß bereits mit Methoden und Sätzen aus Analysis 1 zugänglich.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel meines Vortrags ist, bestimmte Familien von stetigen Funktionen zu finden, mit deren Hilfe, wir jede andere stetige Funktion approximieren können. In anderen Worten,wir wollen zu jeder stetigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen aus $W \subset \mathcal{C}(X)$ (Raum der stetigen Funktionen von X auf $\mathbb{R}$) finden, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sollten wir uns aber ersteinmal eine wichtige Voraussetzung herleiten:

Wir betrachten die Definition von gleichmäßiger Konvergenz: Eine Folge von Funktionen $f_1, f_2, f_3, ... : X \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to \mathbb{R}$, wenn gilt:

1. Die Funktionen $f - f_n$ sind beschränkt
2. Die Folge der Zahlen $\|f - f_1\|, \|f - f_2\|, \|f - f_3\|, \ldots$ ist eine Nullfolge,

   wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm darstellt.

Wenn wir dann jetzt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ betrachten, so wissen wir, dass es uns schwer fallen wird, eine Folge von Funktionen zu finden, die die erste Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz erfüllt. Deswegen sollten wir an dieser Stelle eine zusätzliche Eigenschaft von den stetigen Funktionen fordern: sie sollen möglichst beschränkt sein. Um $f(x) = e^x$ trotzdem darstellen zu können formulieren wir dies allerdings ein wenig um und benutzen eine wichtige Erkenntnis aus Analysis 1: eine stetige Funktion auf dem abgeschlossnen Intervall $[a, b]$ besitzt in ihrem Wertevorrat ein Maximum. Wenn wir also $X = [a, b]$ wählen, so wissen wir, dass für alle Funktionen $f, g \in \mathcal{C}(X)$ gilt:

$$f - g \text{ ist beschränkt.}$$

Damit brauchen wir uns um die erste Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz gar nicht mehr zu kümmern.

Wenn wir uns nicht im $\mathbb{R}$ bewegen, sondern allgemeiner $f : X \to \mathbb{R}$ betrachten, wobei X eine beliebiger metrischer Raum ist, so können wir bereits analog schließen, dass X kompakt sein muss, denn dann besitzt der Wertevorrat von f auch ein Maximum.

Im weiteren Verlauf des Vortrags sei also $X = [a, b], a < b$.

2 Vorbereitung

Bevor wir zu eigentlichen Beweis des Satzes kommen, sollten wir uns ein paar Definitionen anschauen:

2.1 Unteralgebra

Definition 2.1 Eine Teilmenge $W \subset \mathcal{C}(X)$ heißt Untervektorraum von $\mathcal{C}$, wenn:

1. Die Nullfunktion in W enthalten ist;
2. $f, g \in W \Rightarrow f + g \in W$;
3. $f \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in W$.

Definition 2.2 Ein Untervektorraum von $\mathcal{C}$, $W \subset \mathcal{C}(X)$ heißt Unteralgebra von C, wenn:

1. die konstanten Funktionen in W enthalten;
2. $f, g \in W \Rightarrow fg \in W$.

Wenn ich im weiteren Verlauf des Vortrags von Unteralgebra spreche, so meine ich damit immer eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X)$.

Dazu ein paar Beispiele:

Beispiel 2.3 Die Menge aller konstanten Funktionen ist trivialerweise eine Unteralgebra.

Beispiel 2.4 Die Menge Δ aller sogenannten Fourierpolynome $f : X \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)\right),$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \forall k \in \{-n, -n+1, ..., 0, 1, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}$, ist eine Unteralgebra.

Beweis:

Die Nullfunktion ist trivialerweise in dieser Menge enthalten (man wähle zum Beispiel $a_k = b_k = 0\ \forall k$). Wenn $f \in \Delta$ und $c \in \mathbb{R}$ so gilt

$$\begin{aligned} cf(x) &= c \sum_{k=-n}^{n} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (ca_k \cos(2\pi kx) + cb_k \sin(2\pi kx)) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (ca_k \cos(2\pi kx) + cb_k \sin(2\pi kx)) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} (d_k \cos(2\pi kx) + f_k \sin(2\pi kx)) \in \Delta \end{aligned}$$

Auch die konstanten Funktionen sind inΔ enthalten:

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b_k \equiv 0$$

Damit ist nämlich die Funktion $f(x) = 1$ enthalten, und da das Vielfache jeder Funktion in Δ enthalten ist, so ist auch jede konstante Funktion darin enthalten.

Sei jetzt $f, g \in \Delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g(x) + f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} (a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)) + \sum_{j=-m}^{m} (c_j \cos(2\pi jx) + d_j \sin(2\pi jx)) \\ &= \sum_{k=-max(n,m)}^{max(n,m)} (e_k \cos(2\pi kx) + f_k \sin(2\pi kx)) \in \Delta \end{aligned}$$

mit

$$e_k = \begin{cases} a_k + c_k & \text{falls } |k| \leq min(m,n) \\ a_k & \text{falls } |k| > min(m,n) \text{ und } n > m \\ c_k & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_k = \begin{cases} b_k + d_k & \text{falls } |k| \leq min(m,n) \\ b_k & \text{falls } |k| > min(m,n) \text{ und } n > m \\ d_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass falls $f, g \in \Delta$ so auch$fg \in \Delta$. Dazu benötigen wir:

$$\begin{aligned} \sin(x)\sin(y) &= \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{-2} \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \\ \cos(x)\sin(y) &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \end{aligned}$$

Ich werde nun die erste Gleichung beweisen, die beiden anderen verlaufen analog:

Dazu verwende ich:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ und } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Sowie:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sin(y) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{i(x+y)}-e^{i(x-y)}-e^{-i(x-y)}+e^{-i(x+y)}}{-4} \\
&= \frac{\cos(x+y)-\sin(x-y)}{-2}
\end{aligned}$$

Damit kann man jetzt beweisen:$f,g \in \Delta \Rightarrow fg \in \Delta$. Seien also $f,g \in \Delta$

$$\begin{aligned}
g(x)f(x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left(a_k\cos(2\pi kx)+b_k\sin(2\pi kx)\right)\sum_{j=-m}^{m}\left(c_j\cos(2\pi jx)+d_j\sin(2\pi jx)\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}[a_kc_j\cos(2\pi kx)\cos(2\pi jx)+a_kd_j\cos(2\pi kx)\sin(2\pi jx) \\
&+b_kc_j\sin(2\pi kx)\cos(2\pi jx)+b_kd_j\sin(2\pi kx)\sin(2\pi jx)] \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\left(\frac{a_kc_j}{2}[\cos(2\pi(k+j)x)+\cos(2\pi(k-j)x)]\right) \\
&+ \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\left(\frac{a_kd_j}{2}[\sin(2\pi(k+j)x)+\sin(2\pi(j-k)x)]\right) \\
&+ \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\left(\frac{b_kc_j}{2}[\sin(2\pi(k+j)x)+\sin(2\pi(k-j)x)]\right) \\
&+ \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\left(\frac{b_kd_j}{-2}[\cos(2\pi(k+j)x)+\cos(2\pi(j-k)x)]\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\frac{a_kc_j}{2}\cos(2\pi(k+j)x)+\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\frac{a_kc_j}{2}\cos(2\pi(k-j)x)+...
\end{aligned}$$

Ich betrachte jetzt den ersten Summanden:

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m}\frac{a_kc_j}{2}\cos(2\pi(k+j)x) = \sum_{k=-n-m}^{n+m}e_k\cos(2\pi(k)x)$$

Mit

$$e_k = \sum_{\substack{j+i=k,\\ j,i\in[-m-n,m+n]}}\frac{a_ic_j}{2}$$

Ähnlich kann man auch für alle anderen Summanden ein e_k finden, der zweite hätte dann zum Beispiel die Form:

$$e_k = \sum_{\substack{j-i=k,\\ j,i\in[-m-n,m+n]}}\frac{a_ic_j}{2}$$

Somit sind alle Summanden Elemente aus $\Delta \Rightarrow fg \in \Delta$.

$\blacksquare$

Beispiel 2.5 Die Menge aller Polynome $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist eine Unteralgebra. Der Beweis davon ist nicht schwer und wird an dieser Stelle ausgelassen.

2.2 Abschluss

Definition 2.6 Sei $W \subset \mathcal{C}(X)$. Man bezeichnet mit $\overline{W}$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}(X)$ für die gilt:

$$\forall f \in \overline{W} \text{ und } \forall \epsilon > 0 \; \exists g \in W : \|f - g\| < \epsilon$$

Man nennt $\overline{W}$ den Abschluss von W.

Daraus kann man folgendes herleiten:

Lemma 2.7 *Es gilt: $W \subset \overline{W}$.*
Beweis:
Sei $f \in W$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Es folgt: $\|f - f\| = 0 < \epsilon \Rightarrow f \in \overline{W}$.

$\blacksquare$

Lemma 2.8 *Es gilt: $\overline{\overline{W}} = \overline{W}$.*
Beweis:
Es gilt wegen 2.7: $\overline{W} \subset \overline{\overline{W}}$. Zu zeigen: $\overline{W} \supset \overline{\overline{W}}$.
Sei $\epsilon > 0$ und $f \in \overline{\overline{W}} \Rightarrow \exists g \in \overline{W}$ so, dass $\|g - f\| < \frac{\epsilon}{2}$.
Da $g \in \overline{W} \Rightarrow \exists h \in W$, so dass $\|g - h\| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \|h - f\| = \|h - g + g - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\Rightarrow \overline{W} \supset \overline{\overline{W}}$.

$\blacksquare$

Corollar. 2.9 *Sei $f \in \mathcal{C}(X)$. Wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists g \in \overline{W}$ so, dass $\|g - f\| < \epsilon \Rightarrow f \in \overline{W}$.*

Lemma 2.10 *Es gilt: Ist W Unteralgebra, so ist auch $\overline{W}$ eine Unteralgebra.*
Beweis:
Aus 2.7 folgt, dass die Nullfunktion und die konstanten Funktionen in $\overline{W}$ enthalten sind. Also muss man nur noch zeigen:

1. *$f \in \overline{W}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in \overline{W}$:*

   Sei also $\epsilon > 0$, $f \in \overline{W}$, $c \in \mathbb{R}$. Wähle $g \in W$ so, dass: $\|g - f\| < \frac{\epsilon}{|c|}$

$$\Rightarrow \|cg - cf\| = |c|\,\|g - f\| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$$

$\blacksquare$

2. $f, g \in \overline{W} \Rightarrow f + g \in \overline{W}$

   Sei also $\epsilon > 0$, $f, g \in \overline{W}$. *Wähle* $g_1, f_1 \in W$ *so, dass*

$$\|f_1 - f\| < \frac{\epsilon}{2} \textit{ und } \|g - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f + g - (f_1 + g_1)\| < \|f - f_1\| + \|g - g_1\| < \epsilon$$

$\blacksquare$

3. $f, g \in \overline{W} \Rightarrow fg \in \overline{W}$.

   Sei also $\epsilon > 0$, $f, g \in \overline{W}$. *Wir setzen*

$$\delta := min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + \|f\| + \|g\|}\right)$$

   Wähle $g_1, f_1 \in W$ *so, dass*

$$\|f - f_1\| < \delta \textit{ und } \|g - g_1\| < \delta$$

   Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\|fg - f_1 g_1\| &= \|-(f - f_1)(g - g_1) + f(g - g_1) + g(f - f_1)\| \\
&\leq \|f - f_1\|\,\|g - g_1\| + \|f\|\,\|g - g_1\| + \|g\|\,\|f - f_1\| \\
&\leq \delta^2 + \delta\,\|f\| + \delta\,\|g\| = \delta\,(\delta + \|f\| + \|g\|) \\
&\leq \delta\,(1 + \|f\| + \|g\|) \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

   Hier habe ich die Ungleichung $\|fg\| \leq \|f\|\,\|f\|$*benutzt, die wir bereits für die Supremumsnorm in Analysis I bewiesen haben.*

$\blacksquare$

Lemma 2.11 *Es gilt: wenn* W *Unteralgebra* $f \in W \Rightarrow |f| \in \overline{W}$.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ *beliebig.*

Bei diesem Beweis benutzen wir einen Spezialfall des Approximationssatzes von Weierstraß, nämlich dass man die Funktion $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *mit* $h(x) = |x|$ *durch Polynome approximieren kann, das heißt:*

$$\exists p_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

sodass:
$$|p_n(x) - |x|| < \epsilon \text{ für alle } x \in [-1,1]$$
Wir betrachten jetzt die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ *mit* $g(x) = \frac{f(x)}{\|f\|+1}$.
Es gilt also: $|g(x)| \leq 1$.
Es gilt dann
$$|p_n(g(x)) - |g(x)|| < \epsilon$$
Und da $p_n(g(x)) = a_0 + a_1 g(x) + ... + a_n g(x)^n \in W \Rightarrow |g| \in \overline{W}$
$$\Rightarrow |f| = (\|f\| + 1)\,|g| \in \overline{W}$$

■

Definition 2.12 Für $f \in \mathcal{C}(X)$ definiert man:
$$f^+(x) := max(f(x), 0),$$
und
$$f^- := f^+ - f$$

Corollar. 2.13 *Es gilt trivialerweise:*

1. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$
2. f^+, f^- *liegen in* $\mathcal{C}(X)$
3. $f^+, f^- \geq 0$ *und* $f = f^+ - f^-$

Definition 2.14 Für $f, g \in \mathcal{C}(X)$ definiert man:
$$(f \vee g)(x) := max(f(x), g(x)),$$
und
$$(f \wedge g)(x) := min(f(x), g(x))$$

Corollar. 2.15 *Es gilt trivialerweise:*

1. $f \vee g = f + (g - f)^+$
2. $f \wedge g = f - (g - f)^+$
3. *Somit erhalten wir wegen 2.10 für* $f, g \in W$, W *eine Unteralgebra:*
$$f \vee g, f \wedge g \in \overline{W}$$

2.3 Punktetrennung

Definition 2.16 Eine Menge $W \subset \mathcal{C}(X)$ heißt punktetrennend, falls zu je zwei verschiedenen Punkten c, d aus X ein $f \in W$ existiert, sodass $f(c) \neq f(d)$.

Lemma 2.17 *Seien $c, d \in X, c \neq d$ und $A, B \in \mathbb{R}$. Wenn W eine punktetrennende Unteralgebra, so existiert $f \in W$ mit*

$$f(c) = A \text{ und } f(d) = B$$

Beweis:

Da W punktetrennend, so existiert ein $p \in W$ mit $p(c) = c_1$ und $p(d) \neq c_1$. Und da $c_1 \in W$ liegt, da W Unteralgebra, so gilt $p_1(x) \in W$ mit $p_1(x) = p(x) - c_1$. Es existiert also ein $p_1 \in W$ mit $p_1(c) = 0$ und $p_1(d) \neq 0$

$\Rightarrow \ \exists h, g \in W$ *mit*

$$g(c) = 0,\ g(d) \neq 0 \text{ und } h(d) = 0,\ h(c) \neq 0$$

Man setze nun:

$$f(x) := \frac{B}{g(d)} g(x) + \frac{A}{h(c)} h(x)$$

■

Lemma 2.18 *Seien W eine punktetrennende Unteralgebra, $f \in \mathcal{C}(X)$, $\epsilon > 0$ und $d \in X$. So existiert ein $g \in \overline{W}$ mit folgenden beiden Eigenschaften (zur Erinnerung $X = [a, b]$):*

1. $g(d) = f(d) - \frac{\epsilon}{2}$
2. $g(x) < f(x)\ \forall x \in X$

Beweis:

Wir betrachten die Menge M aller $c \in X$, sodass eine Funktion $g \in \overline{W}$ existiert mit:

1. $g(d) = f(d) - \frac{\epsilon}{2}$
2. $g(x) < f(x)$ *für* $x \in [a, c]$

Wir müssen also zeigen, dass $b \in M$ gilt. Wir betrachten erst einmal die Funktion $g_1 \in \overline{W}$ mit:

$$g_1(d) = f(d) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } g_1(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2}$$

Diese Funktion existiert wegen 2.17 (auch wenn $a = d$ sein sollte).

Weil g_1 und f stetig sind, folgt: $\exists \alpha > a : g_1(x) < f(x)$ für alle $a \leq x \leq \alpha$. Es folgt: $\alpha \in M$. Insbesondere ist M dann nicht leer. Und da M auch von b beschränkt ist, können wir das Supremum von M betrachten: $\sup(M) = \delta$. Es gilt dann $\delta > a$.

Wenn $c \in M$ so folgt auch trivialerweise, dass auch $m \in M$ ist, wenn $m < c$. Daraus folgt: Es gilt entweder $M = [a, \delta]$ oder $M = [a, \delta)$. Wir zeigen ersteinmal, dass die zweite Möglichkeit nicht eintreten kann.

Wir betrachten dazu die Funktion $h \in \overline{W}$ mit:

$$h(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } h(\delta) = f(\delta) - \frac{\epsilon}{2}$$

Eine solche Funktion existiert wegen 2.17 (auch wenn $\delta = d$ sein sollte). Da h und f stetig sind, existiert dann ein β mit $a < \beta < \delta$, sodass

$$h(x) < f(x) \text{ für } \beta \leq x \leq \delta$$

Da $\beta < \delta \Rightarrow \beta \in M$. Daraus folgt: es existiert eine Funktion $k \in \overline{W}$, sodass:

$$k(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } k(x) < f(x) \text{ für } x \in [a, \beta]$$

Die Funktion $g_2 \in \overline{W}$ mit $g_2(x) = (h \wedge k)(x)$ erfüllt also die Eigenschaften:

$$g_2(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } g_2(x) < f(x) \text{ für } x \in [a, \delta]$$

Damit ist $\delta \in M$. Daraus folgt $M = [a, \delta]$.

Also müssen wir nur noch zeigen, dass: $\delta = b$. Beweis durch Widerspruch:

Angenommen $\delta < b$. Wir betrachten dann g_2 wie oben. Wegen der Stetigkeit von g_2 und f folgt dann:

$$\exists \varphi \text{ mit } \delta < \varphi < b,$$

sodass

$$g_2(x) < f(x) \text{ für } \delta \leq x \leq \varphi.$$

Daraus folgt: $g_2(x) < f(x)$ für $x \in [a, \varphi]$. Daraus ergibt sich: $\varphi \in M$. Widerspruch, denn δ ist das Supremum von M.

$\Rightarrow M = [a, b], \Rightarrow \exists g_3 \in \overline{W}$ mit:

$$g_3(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } g_3(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

■

3 Der Satz von Stone-Weierstrass (Spezialfall)

Theorem 3.1 *Sei $W \subset \mathcal{C}(X)$ eine punktetrennende Unteralgebra, so gilt $\overline{W} = \mathcal{C}(X)$.*

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu 2.18:

Seien $f \in \mathcal{C}(X)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir müssen dann zeigen, dass es eine Funktion $g \in \overline{W}$ gibt, sodass $f(x) - \epsilon < g(x) < f(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Wenn wir das nämlich gezeigt haben, so wissen wir, dass:

$$\|f - g\| < \epsilon,$$

und wegen 2.9 gilt dann: $f \in \overline{W}$.

Wir betrachten die Menge M aller $c \in X$, sodass eine Funktion $g \in \overline{W}$ existiert mit:

$$f(x) - \epsilon < g(x) \text{ für } x \in [a, c] \text{ und } g(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

Wir müssen also zeigen, dass $b \in M$ gilt. Wir betrachten ersteinmal die Funktion $g_1 \in \overline{W}$ mit:

$$g_1(a) = f(a) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } g_1(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

Diese Funktion existiert wegen 2.18.

Weil g_1 und f stetig sind, folgt: $\exists \alpha > a : f(x) - \epsilon < g_1(x)$ für alle $a \leq x \leq \alpha$. Es folgt: $\alpha \in M$. Insbesondere ist M dann nicht leer. Da M auch von b beschränkt ist, können wir das Supremum von M betrachten: $\sup(M) = \delta$. Es gilt dann $\delta > a$.

Wenn $c \in M$ so folgt auch trivialerweise, dass auch $m \in M$ ist, wenn $m < c$. Daraus folgt: Es gilt entweder $M = [a, \delta]$ oder $M = [a, \delta)$. Wir zeigen wieder, dass die zweite Möglichkeit nicht eintreten kann.

Wir betrachten dazu die Funktion $h \in \overline{W}$ mit:

$$h(\delta) = f(\delta) - \frac{\epsilon}{2} \text{ und } h(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

Eine solche Funktion existiert wegen 2.18. Da h und f stetig sind, existiert dann ein β mit $a < \beta < \delta$, sodass

$$h(x) > f(x) - \epsilon \text{ für } \beta \leq x \leq \delta$$

Da $\beta < \delta \Rightarrow \beta \in M$. Daraus folgt: es existiert eine Funktion $k \in \overline{W}$, sodass:

$$f(x) - \epsilon < k(x) \text{ für } x \in [a, \beta] \text{ und } k(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

Die Funktion $g_2 \in \overline{W}$ mit $g_2(x) = (h \vee k)(x)$ erfüllt also die Eigenschaften:

$$f(x) - \epsilon < g_2(x) \text{ für } x \in [a, \delta] \text{ und } g_2(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

Damit ist $\delta \in M$. Daraus folgt $M = [a, \delta]$.

Also müssen wir nur noch zeigen, dass: $\delta = b$. Beweis durch Widerspruch:

Angenommen $\delta < b$. Wir betrachten dann g_2 wie oben. Wegen der Stetigkeit von g_2 und f folgt dann:

$$\exists \varphi \text{ mit } \delta < \varphi < b,$$

sodass

$$f(x) - \epsilon < g_2(x) \text{ für } \delta \leq x \leq \varphi.$$

Daraus folgt: $f(x) - \epsilon < g_2(x)$ *für* $x \in [a, \varphi]$. *Daraus ergibt sich:* $\varphi \in M$. *Widerspruch, denn* δ *ist das Supremum von* M.

$\Rightarrow M = [a, b], \Rightarrow \exists g_3 \in \overline{W}$ *mit:*

$$f(x) - \epsilon < g(x) < f(x) \text{ für alle } x \in X$$

■

Corollar. 3.2 *Mit Hilfe von Polynomen kann man jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenem Intervall beliebig genau approximieren.*

Beweis:

Die Polynome sind auch punktetrennend. Da sie eine Unteralgebra bilden (2.5), folgt die Behauptung wiederrum aus 3.1.

4 Der Satz von Stone-Weierstrass (Anderer Spezialfall)

Wir wollen eine andere Variante des Approximationssatzes betrachten:

Sei $\mathcal{P}(X) = \{f \in \mathcal{C}([a, b]); f(a) = f(b)\}$

Diese Menge bildet trivialerweise eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X)$.

Theorem 4.1 *Sei* $W \subset \mathcal{P}(X)$, *eine Unteralgebra von* $\mathcal{C}(X)$. *Wenn zu zwei Punkten* $c, d \in X, c \neq d$ *und* $\{c, d\} \neq \{a, b\}$ *ein* $g \in W$ *existiert so, dass* $g(c) \neq g(d)$, *dann gilt*

$$\overline{W} = \mathcal{P}(X)$$

Beweis:

Man muss hierfür 2.17 ein bisschen abschwächen:

Seien $c, d \in X, c \neq d, \{c, d\} \neq \{a, b\}$ *und* $A, B \in \mathbb{R}$. *Es existiert dann ein* $f \in W$ *mit*

$$f(c) = A \text{ und } f(d) = B$$

Die einzigen Stellen, wo 2.17 benutzt wird, sind im 2.18 zu finden. Wenn wir dort $\mathcal{C}(X)$ *durch* $\mathcal{P}(X)$ *ersetzen, können wir problemlos die abgeschwächte Version davon benutzen.*

Somit verläuft der Beweis von 4.1 analog zu 3.1 wenn man dort $\mathcal{C}(X)$ *durch* $\mathcal{P}(X)$ *ersetzt, und die abgeschwächte Version von 2.17 benutzt.*

■

Corollar. 4.2 *Für alle* $\epsilon > 0$ *und zu jeder stetigen Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit Periode eins existiert ein Fourierpolanom* P *mit der Eigenschaft*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Beweis:

Wenn wir die Funktion f auf $[0,1]$ einschränken, so liegt diese in $\mathcal{P}([0,1])$. Da die Fourierpolynome $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Unteralgebra bilden, eine Teilmenge von $\mathcal{P}([0,1])$ sind und die Punktetrennungseigenschaften gemäß 4.1 besitzen, so folgt die Behauptung aus 4.1.

■

5 Resümee

Das Besondere an dem Satz von Stone-Weierstraß ist, dass er zum Beweis trozdem einen Spezialfall des Weierstraß'schen Approximationssatzes braucht, obwohl er viel allgemeiner ist. Wenn man nämlich nicht zeigen kann, dass die Betragsfunktion durch Polynome angenähert werden kann, bricht der ganze Beweis zusammen. Man kann sogar sagen, dass dieser Teil der Dreh- und Angelpunkt des Beweises ist, der Rest ist nämlich nur eine einfache Folgerung daraus, der Stetigkeit und des Vollständigkeitsaxiomes[1]. „Einfach" ist natürlich in dem Sinne zu verstehen, dass nur sehr zentrale Sätze aus Analysis 1 benutzt werden, die wir alle bereits im Schlaf beherrschen müssten. Es könnte jedoch durch die Länge und Komlexität des Beweises schnell Verwirrung auftreten, die aber auch genauso schnell wieder vergeht, wenn man sich am Anfang nicht abschreckern lässt. All diejenigen Leser dieser Ausarbeitung, die bereits mit Funktionen auf kompakten metrischen Räumen arbeiten können und interessiert genug sind, sollten sich den allgemeinen Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß anschauen. Dieser ist nämlich viel angenehmer zu lesen und bei weiten nicht so komplex wie der ein-diminsionale reelle Spezialfall hier. Aber auch bei der allgemeinen Version wird man dann sehen, dass der Beweis nicht ohne den Weierstraß'schen Approximationssatz auskommen kann.

Literatur

[1] Prof. Eberhard Freitag: Vorlesungen über Analysis.

[1] und natürlich der Punktetrennung und der Eigenschaften der Unteralgebren