Die Transzendenz von e

Stephan Wojtowytsch

21. Juni 2009

Wir wollen zeigen, dass die eulersche Zahl e transzendent ist. Transzendente Zahlen sind Zahlen, die nicht als Nullstellen von Polynomen mit ganzen Koeffizienten auftreten.
Bereits im Altertum stellte man sich die Frage, ob man geometrisch ein Quadrat konstruieren könne, dass exakt den selben Flächeninhalt habe wie ein gegebener Kreis. Dem griechischen Schriftsteller *Plutarch* zufolge beschäftigte sich der Philosoph *Anaxagoras* ca. 430 v.Chr. mit diesem Problem. Gelöst wurde es erst 1882 von dem deutschen Mathematiker *Ferdinand von Lindemann*, und zwar in der Form, dass es nicht möglich ist. Die Kreiszahl π ist transzendent. Dabei baute er auf den Beweis der Transzendenz der eulerschen Zahl e von *Charles Hermite* auf[1].
Wir werden die Transzendenz von e auf zwei Arten beweisen. Der erse Beweis ist eine *David Hilbert* vereinfachte Variante des ursprünglichen Beweises von Hermite.

Definition: Eine komplexe Zahl a heißt *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen (bzw. rationalen) Koeffizienten[2], die nicht alle Null sind, ist:

$$a \in \mathbb{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{Q}[x],\, p \neq 0 : \, p(a) = 0$$

Die Menge der algebraischen Zahlen nennen wir $\mathbb{A}$. Eine nicht-algebraische Zahl heißt *transzendent*.

Bemerkungen: $\mathbb{A}$ ist abzählbar, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ ist überabzählbar.
Das Produkt, die Summe oder der Quotient von algebraischen Zahlen ist algebraisch.
Nach dem *Satz von Hermite-Lindemann*, ist, wenn a algebraisch ist, e^a transzendent[3].

Beispiele: Alle rationalen Zahlen sind algebraisch, da $\frac{p}{q}$ eine Nullstelle von $f(x) = qx - p$ ist. Der goldene Schnitt Φ ist algebraisch, denn er genügt der Gleichung $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Die imaginäre Einheit i ist algebraisch, denn $i^2 + 1 = 0$. Alle Wurzeln ganzer Zahlen sind algebraisch.
$\sin(1), \Gamma(\frac{1}{3}), \Gamma(\frac{1}{4}), 2^{\sqrt{2}}, \ln(a)$ sind transzendent für $a \in \mathbb{Q}, a > 0, a \neq 1$.

---

1 Lindemann führte die Annahme, π sei algebraisch, über die Gleichung $e^{i\pi} = 1$ zum Widerspruch.

2 Beide Definitionen führen zu den gleichen algebraischen und transzendenten Zahlen, denn sei eine Zahl a Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten $\sum_{i=0}^n \frac{p_i}{q_i} a^i = 0 \;\; p_i, q_i \in \mathbb{Z}, q_i \neq 0$, so setze $A = \prod_{i=0}^n q_i$ Es folgt, dass $A \sum_{i=0}^n \frac{p_i}{q_i} a^i = 0 = \sum_{i=0}^n \frac{A\, p_i}{q_i} a^i = \sum_{i=0}^n z_i\, a^i,\; z_i \in \mathbb{Z}$. Alle Zahlen, die Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind, sind auch Nullstelle eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten.

3 Satz und Beweis findet man übersichtlich dargestellt unter: *http://math-www.upb.de/user/hilgert/static/Lehrveranstaltungen/Klinke.pdf*

Satz: Die eulersche Zahl $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ist transzendent. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, es gebe $a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n$, $a_0 \neq 0$, für die gilt[4]:

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_1 e + a_0 = 0 \tag{1}$$

Wir drücken nun e, e^2, ..., e^n aus als:

$$e = \frac{M_1 + \epsilon_1}{M}$$

$$e^2 = \frac{M_2 + \epsilon_2}{M}$$

$$\vdots$$

Wie wir später sehen werden, sind in unserem Beweis $M, M_k \in \mathbb{Z}$, also $\frac{M_k}{M} \in \mathbb{Q}$ und $\frac{\epsilon_k}{M}$ ergibt den irrationalen Rest. Ironischerweise wird genau die Tatsache, dass wir e^k so gut durch eine rationale Zahl approximieren können, also, dass ϵ_k so klein werden kann, uns ermöglichen zu beweisen, dass e transzendent ist. Nun setzen wir diese Defintionen in (1) ein:

$$a_n \frac{M_n + \epsilon_n}{M} + a_{n-1} \frac{M_{n-1} + \epsilon_{n-1}}{M} + \ldots + a_1 \frac{M_1 + \epsilon_1}{M} + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n (M_n + \epsilon_n) + a_{n-1} (M_{n-1} + \epsilon_{n-1}) + \ldots + a_1 (M_1 + \epsilon_1) + a_0 M = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n M_n + a_{n-1} M_{n-1} + \ldots + a_1 M_1 + a_0 M = - [a_n \epsilon_n + a_{n-1} \epsilon_{n-1} + \ldots + a_1 \epsilon_1] \tag{2}$$

Es ist leicht zu erraten, was wir tun werden - wir werden zeigen, dass diese Gleichung nicht wahr ist. Dazu zeigen wir, dass auf der linken Seite von (2) eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$ steht, auf der rechten hingegen eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}, |r| < 1$.
Zu diesem Zwecke definieren wir zunächst einmal M, M_k und ϵ_k. Sei p eine Primzahl, dann definieren wir:

$$\begin{aligned} M &:= \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} [(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x} dx \\ M_k &:= e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} [(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x} dx \\ \epsilon_k &:= e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} [(x-1)\ldots(x-n)]^p e^{-x} dx \end{aligned}$$

Hierbei sind $n :=$ Grad des Polynoms aus (1) und $1 \leq k \leq n$. Natürlich gilt nun, wie wir wollten:

[4] Mit der Forderung $\exists i : a_i \neq 0$ schließen wir das Nullpolynom aus. Angenommen, es gelte für eine algebraische Zahl $z \neq 0$: $a_n z^n + \ldots + a_1 z = 0$, dann gilt außerdem: $a_n z^{n-1} + \ldots + a_1 = 0$. Diese Division ist möglich, da bekanntlich $z \neq 0$. Es folgt durch simples Umbenennen: $a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Darum dürfen wir spezifisch voraussetzen, dass ausgerechnet $a_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{M_k + \epsilon_k}{M} &= \frac{e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx \;+\; e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx}{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx} \\
&= \frac{e^k \left(\int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx \;+\; \int_0^k \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx\right)}{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx} \\
&= e^k \frac{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx}{\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx} \\
&= e^k
\end{aligned}$$

Wir werden nun M untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst das Polynom:

$$(x-1)\dots(x-n) = x^n \pm \dots \pm n!$$

Wenn wir davon die p-te Potenz nehmen erhalten wir:

$$\left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p = x^{np} \pm \dots \pm (n!)^p$$

Was genau dazwischen steht braucht uns nicht zu interessieren - wir wissen allerdings, dass wir ein Polynom mit ganzen Koeffizienten C_i vor uns haben. Wir können daher M auch schreiben als:

$$M = \sum_{i=0}^{np} \frac{1}{(p-1)!} C_i \int_0^\infty x^{p-1+i} e^{-x} dx$$

Diesem Integral sind wir bereits begegnet, es handelt sich hier um die Gammafunktion! Nur zur Erinnerung: $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\,,\ \Gamma(n) = (n-1)!\,, n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet:

$$M = \sum_{i=0}^{np} C_i \frac{(p+i-1)!}{(p-1)!}$$

Für $i = 0$ ergibt der Ausdruck (da natürlich $C_0 = (n!)^p$):

$$\pm\,(n!)^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = \pm (n!)^p$$

Dies ist immer eine ganze Zahl (und von 0 verschieden). Wir können nun natürlich p so groß wählen, wie wir wollen, da es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir betrachten im Folgenden nur noch $p > n$. Für diese p gilt:

$$p \not| \pm (n!)^p$$

Für $i \geq 1$ ergibt sich hingegen[5]:

$$C_i \frac{(p+1-i)!}{(p-1)!} = C_i (p+i-1)\dots p$$

Auch dies ist immer eine ganze Zahl, und zwar eine, die immer von p geteilt wird. Also besteht die Summe aus $np - 1$ ganzzahligen Summanden, die von p geteilt werden und

[5] Und freilich $np \geq 1$

einem, der nicht von p geteilt wird. Also wird ist M eine ganze Zahl, die nicht von p geteilt wird. Insbesondere ist $M \neq 0$, wir können also sinnvoll durch M teilen.

Betrachten wir nun die M_k. Wir haben definiert:

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{-x} dx$$

Hier ist e^k ein Skalar, den wir ins Integral hineinziehen dürfen:

$$M_k = \int_k^\infty \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\dots(x-n)\right]^p e^{k-x} dx$$

Wir integrieren nach der Substitutionsregel, bzw. simpler: Wir ersetzen die Variable x durch die Variable $u := x - k$:

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}}{(p-1)!} \left[(u+k-1)\dots u \dots (u+k-n)\right]^p e^{-u}\, du$$

Dieses Integral sieht sehr bekannt aus. Wo liegt nun der entscheidende Unterschied zwischen M und M_k? Der Ausdruck in der Klammer enthält an der k-ten Stelle den Faktor u, $1 \leq\ k \leq\ n$, daher enthält die p-te Potenz dieses Ausdrucks den Faktor u^p. Daher ist der Term in den Klammern zur p-ten Potenz ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, dessen Exponenten alle $\geq p$ sind. Folglich ist

$$M_k = \sum_{j=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_j \int_0^\infty u^{p+j-1} e^{-u}\, du = \sum_{j=1}^{np} D_j \frac{(p+j-1)!}{(p-1)!}$$

wobei die D_j ganze Zahlen sind. Weil jedes der Polynome mindestens Grad p hat beginnt dieses Mal die Summe bei $j = 1$, weshalb der erste Summand in M, der nicht durch p teilbar war, hier nicht mehr auftritt! Daher ist jedes M_k eine ganze Zahl, die durch p teilbar ist.

Wir werden p nun weiter einschränken, indem wir voraussetzen: $p > |a_0|$. Dann gilt $p \not| a_0$ und $p \not| M$, woraus nach der eindeutigen Primfaktorzerlegbarkeit $p \not| a_0 M$. Wir wissen:

$$p \mid a_n M_n + a_{n-1} M_{n-1} + \dots\ + a_1 M_1$$

weil p jeden einzelnen Summanden teilt, und wir wissen weiter:

$$p \not| a_0 M$$

Daraus folgt, dass die beiden Ausdrücke nicht betragsmäßig gleich sind, also sind sie keine additiven Inversen. Darum ist ihre Summe $a_n M_n + a_{n-1} M_{n-1} + \dots\ + a_1 M_1 + a_0 M \neq 0$. Da wir nur ganze Zahlen addieren, ist diese Summe natürlich auch eine ganze Zahl. Wir haben nun die Aussage über die linke Seite von (2), die wir erreichen wollten, bewiesen. Es gilt also:

$$a_n M_n + a_{n-1} M_{n-1} + \dots\ + a_1 M_1 + a_0 M \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Wenden wir uns nun der rechten Seite von (2) zu. Dieser Teil des Beweises geht deutlich leichter. Wir wollen zeigen, dass, wenn wir p nur groß genug werden, die ϵ_k beliebig klein werden. Es reicht uns, diese Aussage für ein ϵ_k zu beweisen. Dazu reichen folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\epsilon_k| &= e^k \left| \int_0^k \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\ldots(x-n)\right]^p e^{-x} dx \right| \\ &\leq e^k \int_0^k \left| \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\ldots(x-n)\right]^p \right| e^{-x} dx \\ &\leq e^n \int_0^n \left| \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \left[(x-1)\ldots(x-n)\right]^p \right| e^{-x} dx \end{aligned}$$

Sei nun $X := max\{\, |(x-1)\ldots(x-n)| \;:\; x \in [0,n]\}$.

$$\begin{aligned} |\epsilon_k| &\leq \frac{e^n n^{p-1} X^p}{(p-1)!} \int_0^n e^{-x} dx \\ &\leq \frac{e^n n^{p-1} X^p}{(p-1)!} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{=0!=1} \\ &= \frac{e^n n^{p-1} X^p}{(p-1)!} \\ &\leq \frac{e^n n^p X^p}{(p-1)!} = e^n \frac{(nX)^p}{(p-1)!} \end{aligned}$$

Da n und X feste Größen sind, wir p aber frei wählen dürfen, können wir diesen Ausdruck so klein werden lassen, wie wir wünschen, wenn wir nur p hinreichend groß werden lassen. Wir können darum alle ϵ_k so klein werden lassen, dass ihre Summe betragsmäßig kleiner als 1 wird.

$$\Rightarrow |a_n\epsilon_n + a_{n-1}\epsilon_{n-1} + \ldots\ + a_1\epsilon_1| < 1$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichung (2) nicht wahr ist, womit unsere Annahme (1) zu einem Widerspruch geführt wurde. Wir schließen also daraus: $\nexists p \in \mathbb{Q}\,[x], p \neq 0 : p\,(e) = 0$. Mithin ist e transzendent.

Beweis nach Adolf Hurwitz

Wir werden die Transzendenz von e noch einmal auf andere Weise zeigen. Dieser Beweis stammt von dem deutschen Mathematiker Adolf Hurwitz. Dazu leisten wir zunächst ein wenig technische Vorarbeit. Sei $f(x)$ ein beliebiges Polynom n-ten Grades und

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)$$

die Summe seiner Ableitungen. Setze die Hilfsfunktion

$$\Phi(x) := e^{-x} F(x)$$

Offensichtlich ist:

$$\Phi(0) = e^0 F(0) = F(0)$$

Betrachten wir nun die Ableitung

$$\Phi'(x) = e^{-x}F'(x) - e^{-x}F(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = -e^{-x}f(x)$$

Wir werden nun den Mittelwertsatz auf diese Funktion zwischen 0 und x anwenden:

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = \Phi'(\xi) = -e^{-\xi}f(\xi), \quad \xi \in (0, x)$$

Durch Termumformung erhalten wir:

$$F(0)e^x = F(x) + xe^{x-\xi}f(\xi) \tag{3}$$

Φ werden wir ab jetzt nicht mehr brauchen. Wir betrachten nun für ein $a \in \mathbb{R}$ die Taylorentwicklung von f nach a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} \tag{4}$$

Wir stellen fest: Man gewinnt $F(a)$, wenn man f nach a entwickelt und in der Entwicklung den Ausdruck $(x-a)^k$ durch $k!$ ersetzt, $1 \le k \le n$.

Nach dieser Vorarbeit können wir mit dem Beweis anfangen. Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, dass

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \ldots + a_1 e + a_0 = 0 \tag{5}$$

wobei $a_k \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$. Sei f zunächst wieder ein beliebiges Polynom. Wir multiplizieren (5) mit $F(0)$:

$$(a_n e^n + \ldots + a_1 e + a_0)F(0) = a_n e^n F(0) + \ldots + a_1 eF(0) + a_0 F(0)$$

$$\overset{(3)}{=} a_n F(n) + a_n n e^{n-\xi_n} f(\xi_n) + \cdots + c_1 F(1) + a_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1) + a_0 F(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n F(n) + \cdots + a_1 F(1) + a_0 F(0) = -\left[a_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1) + \cdots + n a_n e^{n-\xi_n} f(\xi_n)\right] \tag{6}$$

Wobei $0 \le \xi_i \le i$ für $1 \le i \le n$. Wir wählen nun eine Primzahl p, für die gilt $p > n, p > |a_0|$ und betrachten im Folgenden ein bestimmtes f, nämlich:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left[(x-1)\ldots(x-n)\right]^p$$

Nun wollen wir die dazugehörigen $F(0), F(1), \ldots, F(n)$ bestimmen. Wir beginnen mit $F(0)$. Nach (4) müssen wir dazu f nach 0 taylorentwickeln:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\left[(-1)^{np}(n!)^p x^{p-1} + A_p x^p + A_{p+1}x^{p+1} + \cdots + A_{(n+1)p-1}x^{(n+1)p-1}\right]$$

Hierbei sind die A_i ganze Zahlen. Weil wir ausgerechnet nach 0 entwickeln, und weil wir wissen, dass die Taylorentwicklung eindeutig ist, sind die $\frac{A_i}{(p-1)!}$ genau die Taylorkoeffizienten. Wir substituieren nun x^i durch $i!$, $p-1 \leq i \leq (n+1)p-1$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{(p-1)!}\left[(-1)^{np}(n!)^p(p-1)! + p!A_p + (p+1)!A_{p+1} + \cdots + A_{(n+1)p-1}((n+1)p-1)!\right] \\ &= (-1)^{np}(n!)^p + pK_0 \end{aligned}$$

mit einer ganzen Zahl K_0. Also (da $p > n$): $p \not| F(0)$. Nun betrachten wir $F(k), k = 1, \ldots, n$. Um $F(k)$ zu bestimmen, müssen wir $f(x)$ nach k entwickeln. Dazu formen wir f geschickt um:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{((x-k)+k)^{p-1}}{(p-1)!}\left\{\left[(x-k)+(k-1)\right]\ldots\left[(x-k)+(k-k)\right]\ldots\left[(x-k)+(k-n)\right]\right\}^p \\ &= \frac{\left[(x-k)+k\right]^{p-1}}{(p-1)!}\left[(x-k)+(k-1)\right]^p\ldots(x-k)^p\ldots\left[(x-k)+(k-n)\right]^p \end{aligned}$$

Weil der Faktor $(x-k)^p$ enthalten ist, ist:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\left[(x-k)^pB_p + (x-k)^{p+1}B_{p+1} + \ldots\right],$$

$B_i \in \mathbb{Z}$, und also:

$$F(k) = \frac{1}{(p-1)!}\left[p!B_p + (p+1)!B_{p+1} + \ldots\right] = pK_k$$

wobei $K_k \in \mathbb{Z}$. Also $p \not| F(0), p|F(k), 1 \leq k \leq n$, und, weil wir p groß genug gewählt haben: $p \not| a_0$.

$$\Rightarrow p \not| a_nF(n) + \cdots + a_1F(1) + a_0F(0)$$

Somit gilt, wie wir wollten:

$$a_nF(n) + \cdots + a_1F(1) + a_0F(0) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Wir wenden uns nun der rechten Seite von (6) zu. Da $0 < \xi_i < n$, ist $e^{1-xi_1}, \ldots, e^{n-xi_n} < e^n$ und für $x \in (0,x)$ außerdem: $|(x-1)\ldots(x-n)| \leq n^n$. Darum ist

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(p-1)!}n^{p-1}(n^n)^p = n^n\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}$$

Insbesondere gilt für $1 \leq k \leq n$:

$$|f(\xi_k)| \leq n^n\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}$$

Setze $c := max\{|a_o|, \ldots, |a_n|\}$. Dann ist:

$$a_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1) + \cdots + na_ne^{n-\xi_n}f(\xi_n) \leq \underbrace{(1+2+\cdots+n)ce^nn^n}_{konstanter Faktor}\underbrace{\frac{(n^{n+1})^{p-1}}{(p-1)!}}_{\stackrel{p\to\infty}{\to}0}$$

Also können wir p so groß wählen, dass

$$a_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1) + \cdots + n c_n e^{n-\xi_n} f(\xi_n) < 1$$

Daraus folgt, dass die Gleichung (6) für dieses f nicht wahr ist, obwohl sie für alle f wahr sein müsste. Daraus folgt, dass die Annahme (5) falsch sein muss. Wir haben noch einmal, diesmal ohne die Benutzung von Integralen, gezeigt, dass e transzendent ist.

Quellen:

- Spivak, Michael: Calculus, Benjamin, New York, 1967 (Seiten 362 ff.)
- *http://planetmath.org/encyclopedia/EIsTranscendental.html* (Beweis nach Hurwitz)
- *Wikipedia.org* (Historisches)