Bernstein-Polynome

Autor: Johannes Erath

Schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag vom 07.04.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Liebe Leserin, lieber Leser,
dieses Dokument entstand im Rahmen des Proseminars Analysis des Sommersemester 2009 unter der Leitung von Prof. Freitag. Es bleibt im folgenden zu beachten, dass dies eine schriftliche Ausarbeitung zum mündlichen Vortrag ist, das heißt hier werden sicherlich nicht alle Aspekte der Bernstein-Polynome betrachtet, sondern der Schwerpunkt lag auf dem Beweis des Weierstraß'schen Approximationssatzes. Hinzu kommen noch einige weitere Eigenschaften der Bernsteinpolynome.

2 Einführung

2.1 Etwas Geschichte...

Die Bernstein-Polynome sind benannt nach dem russischen Mathematiker Sergei Natanowitsch Bernstein. Geboren wurde er am 5.März 1880 in Odessa, in der heutigen Ukraine. Nach seinem Schulabschluss 1898, ging er nach Paris und studierte dort, abgesehen von einem Auslandssemester 1902/03 in Göttingen/ Deutschland, bis 1904. In seiner ersten Promotion in Paris löste er Hilberts 19. Problem über die Analyzität der Lösungen von Lagrangefunktionen. Da damals in Russland keine ausländischen Abschlüsse anerkannt wurden, begann Bernstein nach seiner Rückkehr 1905 erneut zu studieren (in Charkow/ heutige Ukraine). Infolgedessen erwarb er seinen russischen Hochschulabschluss 1908 und seinen zweiten Doktortitel 1913. Um diesen zu bekommen löste er Hilberts 20. Problem, welches die Fragestellung behandelt, unter welchen Bedingungen Randwertprobleme Lösungen besitzen. Bereits 1907 begann Bernsteins Lehrtätigkeit in Charkow und diese dauerte 25 Jahre. 1933 ging er nach Leningrad (heutiges Sankt Petersburg/ Russland) um dort an der Universität und am Polytechnischen Institut zu lehren bis er schließlich 1943 nach Moskau zog, um an der dortigen Universität weiterzuarbeiten. Am 26.Oktober 1968 verstarb er dann auch dort. Während seiner Forschungsarbeit beschäftigte er sich insbesondere im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie und mit der Theorie zur Approximation von Funktionen. Bereits 1911 führte er dabei die nach ihm benannten Polynome ein, um damit den Weierstraß'schen Approximationssatz zu beweisen. Dasselbe wollen wir im Folgenden auch tun.

2.2 Definition der Bernstein-Polynome

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$, sowie $t \in [0,1]$ sind die Bernstein-Polynome definiert als:

$$b_k^n(t) := \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

wobei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Für $k < 0$ und $k > n$ definieren wir:

$$b_k^n(t) := 0$$

Hinweis: Die Bernstein-Polynome können auch auf einem beliebigen Intervall $[a,b]$ definiert werden. Und zwar wie folgt:

$$b_k^n(\frac{t-a}{b-a}) = \binom{n}{k}\frac{t-a}{b-a}^k(1-\frac{t-a}{b-a})^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k}(t-a)^k\frac{1}{(b-a)^k}(\frac{b-a}{b-a}-(\frac{t-a}{b-a}))^{n-k} = \binom{n}{k}(t-a)^k\frac{1}{(b-a)^k}((b-t)^{n-k}\frac{1}{(b-a)^{n-k}})$$

$$= \frac{1}{(b-a)^n}\binom{n}{k}(t-a)^k(b-t)^{n-k}$$

Es wird also lediglich $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$.

2.3 Beispiele

In der Tabelle sehen sie die Bernsteinpolynome für $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$b_k^n(t)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$b_k^0(t)$	1				
$b_k^1(t)$	$1-t$	t			
$b_k^2(t)$	$(1-t)^2$	$2(1-t)t$	t^2		
$b_k^3(t)$	$(1-t)^3$	$3(1-t)^2t$	$3(1-t)t^2$	t^3	
$b_k^4(t)$	$(1-t)^4$	$4(1-t)^3t$	$6(1-t)^2t^2$	$4(1-t)t^3$	t^4

Anhand dieser Tabelle können Sie zum besseren Verständnis die ein oder andere Eigenschaft anhand von konkreten Beispielen überprüfen.

dritten Grades.jpg

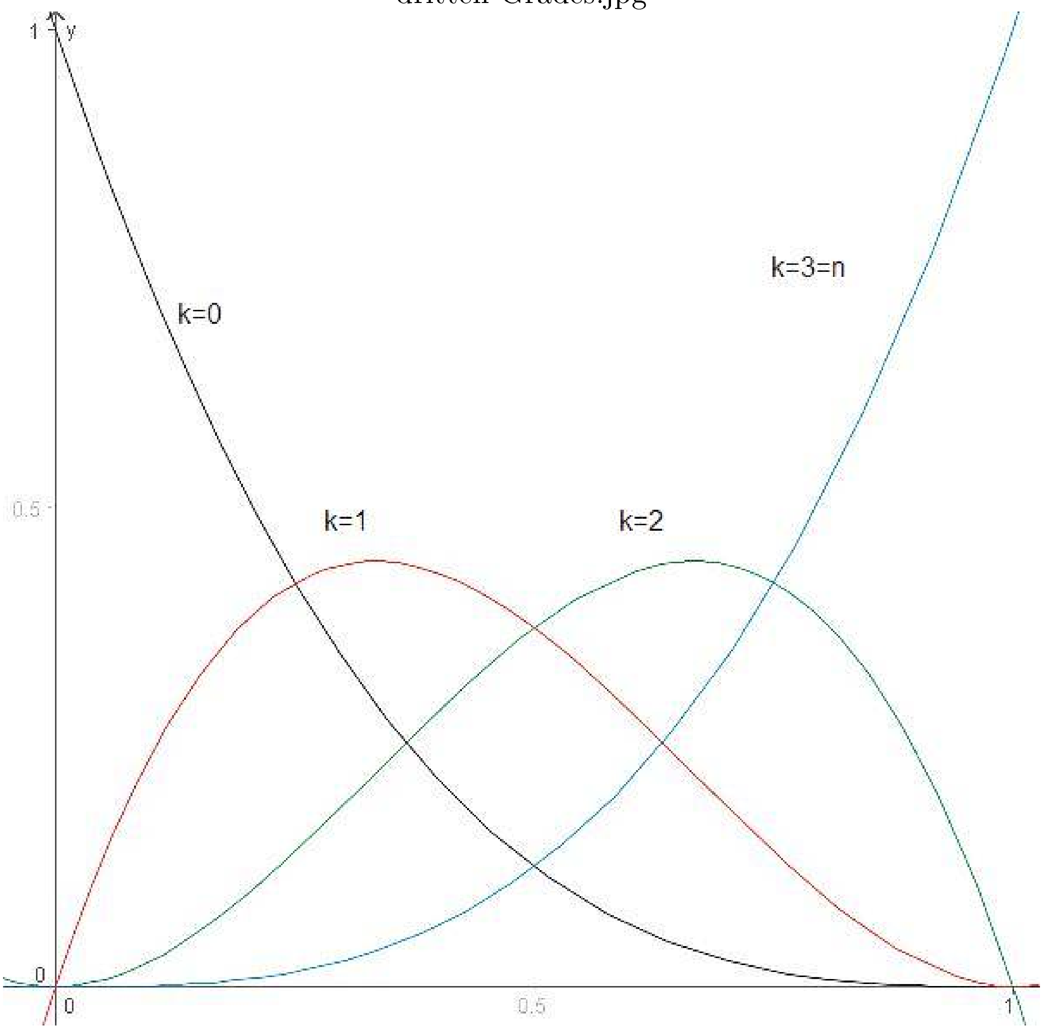

Abbildung 1: Bernstein-Polynome dritten Grades im Intervall [0,1]

vierten Grades.jpg

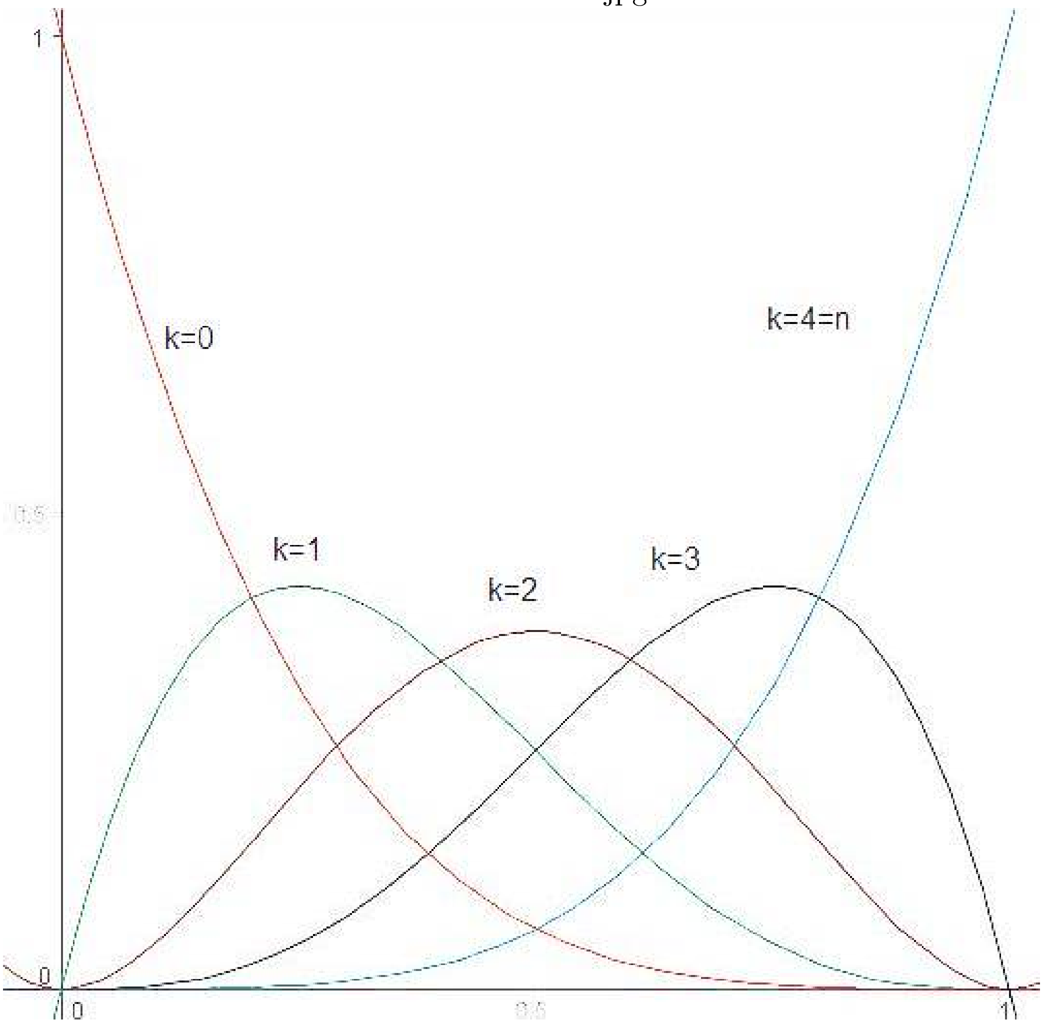

Abbildung 2: Bernstein-Polynome vierten Grades im Intervall [0,1]

3 Der Weierstraß'sche Approximationssatz

Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall [a,b] lässt sich beliebig gut durch Polynome approximieren, das heißt für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein Polynom p, so daß gilt:

$$max_{a \leq t \leq b} |f(t) - p(t)| < \epsilon$$

3.1 Vorbemerkungen

Wir betrachten im folgenden nur den Bereich im Intervall von $[0, 1]$, da jedes Intervall $[a, b]$ linear auf $[0, 1]$ transformiert werden kann.
Für den Hauptteil werden einige Umformungen benötigt, die hier nun bewiesen werden.

- Die Eins:
  Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ gilt:

  $$\sum_{k=0}^{n} b_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k$$

  ist nach der binomischen Formel gleich: $((1 - t) + t)^n = 1$

- Für t gilt:

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^k$$

  $$= t \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^{k-1} = t \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{n-1}(t) = t$$

- Eine weitere Gleichung, die wir später noch gebrauchen ist:

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} b_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^k$$

  $$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n-1}{n-1} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^k = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} b_k^{n-2}(t)$$

$$= \frac{n-1}{n}$$

- Dementsprechend folgt:

$$\sum_{k=0}^{n} f(t)\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k = f(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k = f(t)((1-t)+t)^n = f(t)$$

3.2 Beweis

Wir definieren eine Summe von Polynomen, die sich f annähern sollen, wie folgt:

$$p_n = \sum_{n=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

Daher kann man, um $|f(t)-p_n(t)|$ näher zu bestimmen folgende Umformung vornehmen:

$$f(t) - p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f(t)\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k - \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

Nun versuchen wir den Abstand $|f(t)-p_n(t)|$ für alle $t \in [0,1]$ abzuschätzen. Da f nach Voraussetzung auf einem kompakten Intervall und stetig ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Damit gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ und $s,t \in [0,1]$ muss gelten:

$$|t-s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \epsilon$$

Wir wählen nun ein festes $t \in [0,1]$ und teilen den Index in zwei Teile:

$$f(t) - p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$= \sum_{|t-\frac{k}{n}|<\delta} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k + \sum_{|t-\frac{k}{n}|\geq\delta} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

Denn dadurch können wir nun folgende Abschätzungen vornehmen:

- Vorderer Teil:

$$|\sum_{|t-\frac{k}{n}|<\delta} (f(t) - f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k|$$

$$\overset{Dreiecksungl.}{\leq} \sum_{|t-\frac{k}{n}|} |f(t) - f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{|t-\frac{k}{n}|<\delta} \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k \leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$= \frac{\epsilon}{2}((1-t)+t)^n = \frac{\epsilon}{2}$$

- Hinterer Teil: Da $|t-\frac{k}{n}| \geq \delta \Leftrightarrow \frac{|t-\frac{k}{n}|}{\delta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2} \geq 1$ folgt:

$$|\sum_{|t-\frac{k}{n}|\geq\delta} f(t) - f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k|$$

$$\overset{Dreiecksungl.}{\leq} \sum_{\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\geq 1} |f(t) - f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

Wir definieren: $M := max_{t\in[0,1]}|f(t)|$

Daraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungl.:
$|f(t) - f(\frac{k}{n})| \leq |f(t)| + |f(\frac{k}{n})| \leq 2M$ Und damit:

$$\sum_{\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\geq 1} |f(t) - f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k \leq 2M \sum_{\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\geq 1} \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$\leq 2M \sum_{\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\geq 1} \frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k \leq 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

$$= \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(t-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$$

Betrachten wir nun den Term $\sum_{k=0}^{n}(t-\frac{k}{n})^2 b_n^k$ etwas genauer:

$$\sum_{k=0}^{n}(t-\frac{k}{n})^2 b_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n}(t^2-2t\frac{k}{n}+(\frac{k}{n})^2)b_k^n(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(t^2-2t\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{k}{n^2}-\frac{k}{n^2})b_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n}(t^2-2t\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{n^2}+\frac{k}{n^2})b_k^n(t)$$

$$\overset{nachVorbem.}{=} t^2-2t^2+\frac{1}{n}t+\frac{n-1}{n}t^2 = -t^2(-1+1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}t = \frac{1}{n}t(1-t)$$

Also ist:

$$\frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(t-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k = \frac{2M}{n\delta^2}t(1-t)$$

$$\leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

für alle $t\in[0,1]$, denn $t^2-t\leq\frac{1}{4}$.
Also ist:

$$|\sum_{|t-\frac{k}{n}|\geq\delta} f(t)-f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k| \leq \frac{M}{2n\delta^2}$$

Zusammengefasst erhalten wir:

$$|f(t)-p_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}$$

Wir müssen unser n also so wählen, dass $\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\epsilon}{2}$ erfüllt wird, also besser ausgedrückt $n>\frac{M}{\delta^2}$. Ist dies erfüllt so gilt: $|f(t)-p_n(t)|<\epsilon\ \forall t\in[0,1]$. Es lässt sich also sagen, dass je kleiner $|f(t)-p_n(t)|$

4 Weitere Eigenschaften

4.0.1 Endpunkt-Interpolation

$$b_k^n(0) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-0)^{n-k}0^k \Rightarrow b_n^k(0) = \begin{cases}1 & \text{für } k=1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$b_k^n(1) = \binom{n}{k}(1-1)^{n-k}1^k = \binom{n}{k}0^{n-k}1^k \Rightarrow b_n^k(1) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Eigenschaft, dass alle Werte, abgesehen von dem ersten oder letzten, gleich sind nennt man Endpunkt-Interpolation.

4.0.2 Lineare Unabhängigkeit

Behauptung: Die Bernstein-Polynome sind linear unabhängig, es gilt also: $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k b_k^n(t) = 0$

Beweis: Da die Polynome vom Grad n sind ergibt sich nach n-maliger Ableitung:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{d^y}{dt^y} b_k^n(t) = 0$$

mit $t \in [0,1]; 1 \leq y \leq n$. Nun wissen wir aber auch, dass dieser Term für $t = 0$ 0 ergibt, also:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{d^y}{dt^y} b_k^n(0) = 0$$

Und damit auch $\lambda_n = 0$. Durch Induktion erhält man dann $\lambda_n = \ldots = \lambda_0 = 0$. Daraus folgt dann die Behauptung.

4.0.3 Symmetrie

Behauptung: Die Bernstein-Polynome sind symmetrisch, das heißt $b_k^n(t) = b_{n-k}^n(1-t)$

Beweis:

$$b_{n-k}^n(1-t) = \binom{n}{n-k}(1-(1-t))^{n-(n-k)}(1-t)^{n-k} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = b_n^k(t)$$

4.0.4 Rekursive Darstellung

Behauptung:

$$b_k^n(t) = t b_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t) b_k^{n-1}(t)$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Damit kann man nun unsere Behauptung ganz einfach nachweisen:

$$tb_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t)b_k^{n-1}(t)$$

$$= t\binom{n-1}{k-1}(1-t)^{n-1-(k-1)}t^{k-1} + (1-t)\binom{n-1}{k}(1-t^{n-1-k}t^k)$$

$$= \binom{n-1}{k-1}(1-t)^{n-k}t^k + \binom{n-1}{k}(1-t)^{n-k}t^k = b_n^k(t)$$

4.0.5 Maximum/ Ableitung

Behauptung: $(b_k^n)'(t) = n(-b_k^{n-1}(t) + b_{k-1}^{n-1}(t))$
Beweis: Nach Produkt- und Kettenregel gilt:

$$(b_k^n)'(t) = \binom{n}{k}((n-k)(1-t)^{n-k-1}(-1)t^k + kt^{k-1}(1-t)^{n-k})$$

$$= \binom{n}{k}((n-k)(1-t)^{n-k-1}(-1)tt^{k-1} + kt^{k-1}(1-t)(1-t)^{n-k-1})$$

$$*$$

$$= n\binom{n-1}{k}(1-t)^{n-k-1}t^k(-1) + n\binom{n-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)n-k = n(-b_k^{n-1}(t) + b_{k-1}^{n-1}(t))$$

Behauptung: b_k^n hat ein eindeutig bestimmtes Maximum für $t = \frac{k}{n}$ für $t \in [0,1]$ Beweis: Überprüfen wir zuerst die Randstellen:

$$b_k^n(0) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-0)^{n-k}0^k = 0$$

$$b_k^n(1) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-1)^{n-k}1^k = 0$$

Nach obiger Ableitung bei (*) gilt:

$$\binom{n}{k}((n-k)(1-t)^{n-k-1}(-1)tt^{k-1} + kt^{k-1}(1-t)(1-t)^{n-k-1})$$

$$= \binom{n}{k}(1-t)^{n-k-1}t^{k-1}((-1)(n-k)t + k(1-t))$$

Denn:$k\binom{n}{k} = \frac{k(n!)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$
und $(n-k)\binom{n}{k} = \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}$

Damit dieser Term Null wird (um alle Extremwerte zu finden), muss $(-1)(n-k)t + k(1-t)$ Null werden, also:

$$(-1)(n-k)t + k(1-t) = 0 \Leftrightarrow k - kt = nt - kt \Leftrightarrow k = nt \Leftrightarrow t = \frac{k}{n}$$

Dies ist das eindeutig bestimmte Maximum, denn wie oben gesehen sind beide Randstellen gleich Null und wie man sehr einfach sieht (jeder Faktor ist positiv), sind *die Bernstein-Polynome für alle $t \in [0,1]$ positiv.*

4.0.6 Ordnungserhöhung

Behauptung:

$$b_k^n(t) = \frac{k-1}{n-1}b_{k+1}^{n+1}(t) + \frac{n+1-k}{n+1}b_k^{n+1}(t)$$

Beweis:

$$b_k^n(t) = ((1-t)+t)\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-t)^{n-k}tt^k + \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-t)(1-t)^{n-k}t^k$$

$$= \frac{k+1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}(1-t)^{n-k}t^{k+1} + \frac{n+1-k}{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}(1-t)^{n+1-k}t^{k}$$

$$= \frac{k+1}{n+1}b_{k+1}^{n+1}(t) + \frac{n+1-k}{n+1}b_k^{n+1}(t)$$

4.0.7 Integration

Behauptung: $\int_0^1 b_k^n dt = \frac{1}{n+1}$
Beweis: Für den Beweis hierzu verwenden wir das Ergebnis der Differentialgleichung, wonach:

$$(b_k^n)'(t) = n(-b_k^{n-1}(t) + b_{k-1}^{n-1}(t)) \Leftrightarrow (b_{k+1}^{n+1})'(t) = (n+1)b_k^n(t) - (n+1)b_{k+1}^n(t)$$

$$\Leftrightarrow b_k^n(t) = \frac{1}{n+1}(b_{k+1}^{n+1}(t))' + b_{k+1}^n(t)$$

$b_{k+1}^n(t)$ ist nach Definition gleich Null, daher ist dieses Bernsteinpolynom vernachlässigbar. Desweiteren gilt:

$$\int_0^1 (b_{k+1}^{n+1}(t))'dt = [b_{k+1}^{n+1}(t)]_0^1 = \binom{n+1}{k+1}(1-1)^{n-k}1^{k+1} - \binom{n+1}{k+1}(1-0)^{n-k}0^{k+1}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}0^{n-k}1^{k+1} - \binom{n+1}{k+1}1^{n-k}0^{k+1}$$

Da das Integral unabhängig von k und n aufgrund der Endpunkt-Interpolation dasselbe Ergebnis ergibt, folgt:

$$\int_0^1 b_0^n(t)dt = \int_0^1 b_1^n(t)dt = \ldots = \int_0^1 b_{k+1}^{n+1}(t)dt$$

Da die $\sum_{k=0}^{n+1} b_{k+1}^{n+1}(t) = 1$ ist folgt:

$$\int_0^1 b_k^n(t) = \frac{1}{n+1}$$

5 Quellen und weiterführende Literatur

- http://www.uni-giessen.de/tomas.sauer/Skripten/Approximation.pdf
- http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs59/abschnitt1_1.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernstein_Sergi.html
- https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1255
- Günther Hämmerlin/ Karl-Heinz Hoffmann: Numerische Mathematik, 3.Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1994
- Ole Christensen/ Khadija L. Christensen: Approximation Theory, Birkhäuser Verlag, Boston 2004