RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Die Binomialreihe

SEBASTIAN SCHULZ

AUSARBEITUNG ZUM VORTRAG IM *Proseminar Analysis*
(WINTERSEMESTER 2008/09, LEITUNG PROF. DR. EBERHARD FREITAG)

Zusammenfassung: Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit der Binomialreihe und soll sowohl wesentliche einfache Anwendungsmöglichkeiten als auch die Verwendung in einem speziellen Beweis beinhalten.
Zunächst werden deshalb einige Eigenschaften, Anwendungen und Querverbindungen der Binomialreihe angegeben. Vor allem aber soll diese Ausarbeitung dem Vortrag folgen und auf eine Konstruktion eingehen, mithilfe derer die Betragsfunktion in [-1,1] gleichmäßig durch eine Folge von Polynomen approximiert werden kann. Diese Konstruktion stützt sich auf die Binomialreihe und ist von fundamentaler Bedeutung für den Beweis des Approximationssatzes von Stone-Weierstrass.
Neben der besagten Konstruktion möchte ich im dritten Gliederungspunkt noch auf eine vollkommen andere Möglichkeit eingehen, eine Approximation der Betragsfunktion zu erreichen. Ihre Eleganz mag angezweifelt werden, doch besticht sie durch ihre Effektivität.

Inhaltsverzeichnis

1 Die binomische Reihe

Der Ursprung der Binomialreihe reicht wahrscheinlich bis ins 11. Jahrhundert zurück, als sie zum ersten Mal in Zusammenhang mit dem binomischen Lehrsatz gebracht wurde, allerdings zunächst nur für natürliche Exponenten. Später identifizierte Newton die binomische Reihe als die Taylorreihe der Funktion $(1+x)^\alpha$ für reelle Exponenten, bevor Abel den Konvergenzradius sogar im komplexen Fall bestimmen konnte. Dementsprechend wird als Binomialreihe auch die Potenzreihe bezeichnet, die bereits als besagte Taylorreihe bekannt ist:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \tag{1.1}$$

Im weiteren Verlauf werden nur reelle Exponenten α von Interesse sein, weshalb hier auch der verallgemeinerte Binomialquotient verwendet werden muss:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k} \tag{1.2}$$

Der Konvergenzradius der Binomialreihe ist bereits aus der Analysis I Vorlesung als $r = 1$ bekannt. Innerhalb des Konvergenzradiusses stellt sie dann gerade die Funktion

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

als Taylorreihe dar. An diesem Punkt mag dem Leser bereits deutlich werden, dass die Schwierigkeiten für die Konstruktion im nächsten Gliederungspunkt gerade an den Grenzen des Intervalls [-1,1] zu suchen sind (Wir werden feststellen, dass dies gerade für den "Knick" bei $|x| = 0$ der Fall sein wird).
Um die Bedeutung der Binomialreihe zu veranschaulichen, sind im Folgenden einige Beispiele dafür angegeben, wie sich aus der Binomialreihe sehr schnell andere Potenzreihen oder Identitäten ergeben:

1) Die binomische Formel ist der Spezialfall

$$\alpha = 2,$$

denn dann gilt

$$(1 \pm x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2}{k} (\pm x)^k = x^2 \pm 2x + 1,$$

weil für k>2 der Binomialkoeffizient per obiger Definition (1.2) verschwindet.

2) Die geometrische Reihe erhält man durch

$$\alpha = -1$$

und

$$x \longmapsto -x,$$

denn dann ist

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

wobei die Gleichung $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ benutzt wurde, die offenbar gilt, da nach (1.2) gelten muss

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-1-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot k} = \frac{-1}{1}\cdot\frac{-2}{2}\cdot\frac{-3}{3}\cdot\dots\cdot\frac{-k}{k} = (-1)^k.$$

3) Ersetzt man nun in der geometrischen Reihe beispielsweise x durch $-x^2$, so erhält man leicht

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \mp \dots$$

Diese Anwendung ist zwar eine sehr einfache, dennoch ist es bemerkenswert, dass der Konvergenzradius der rechten Seite unverändert 1 ist, auf der linken Seite allerdings eine auf ganz $\mathbb{R}$ glatte Funktion steht.

4) Etwas interessanter (wenn auch wenig schwieriger) ist die Möglichkeit, die Reihen von $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{1+x^2}$ zu integrieren, wodurch man leicht die Reihendarstellungen

$$log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

und

$$arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

erhalten kann. (Vgl. Analysis Skript III.6)

2 Die Approximation von |x|

Wie bereits in der Einführung versprochen, soll nun ein Möglichkeit angegeben werden, die Betragsfunktion gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall zu approximieren. Genauer wird eine Folge von Polynomen p_n konstruiert, die der folgenden Proposition genügt:

Proposition Auf dem Intervall [-1,1] existiert eine Folge von Polynomen

$$p_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die gleichmäßig gegen die Betragsfunktion |x| konvergiert.

Dazu schreibt man zunächst $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$ und substituiert dann mit $y := 1 - x^2$.
Aus $x \in [-1, 1]$ folgt dann $0 \leq y \leq 1$.
Damit wurde das Problem darauf übertragen, eine Folge von Polynomen $q_n(y)$ zu finden, die in $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $\sqrt{1 - y}$ konvergiert (man erhält dann durch $p_n(x) = q_n(1 - x^2)$ leicht die Polynome in x). Nach der Vorbetrachtung sollte nun klar sein, dass im Folgenden versucht wird, $q_n(y)$ aus der Binomialreihe abzuleiten. Um die Taylorreihe von $\sqrt{1 - y}$ zu erhalten, setzt man also $\alpha = \frac{1}{2}$ und bekommt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-y)^k.$$

Der Konvergenzradius ist als 1 bekannt, allerdings bleibt zu zeigen, dass die Reihe tatsächlich auch $\sqrt{1 - y}$ darstellt. Außerdem ist noch das Verhalten der Reihe am Konvergenzrand zu untersuchen, da die gleichmäßige Approximation sogar im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ erzielt werden soll.
Zunächst folgt aus der Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius, dass die Reihe eine Funktion $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ darstellt. Innerhalb des Konvergenzintervalls ist die gliedweise Ableitung natürlich gestattet, deshalb kann man für diese Funktion folgende Differentialgleichung finden:

$$(1 - y)f'(y) = -\frac{1}{2}f(y) \tag{2.1}$$

Für den Nachweis, dass f diese Differentialgleichung löst, bedarf es einer kurzen Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
(k+1)\binom{\frac{1}{2}}{k+1} &= (k+1)\frac{(\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \ldots (\frac{1}{2} - k)}{(k+1)!} \\
&= \frac{(\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \ldots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}(\frac{1}{2} - k) \\
&= \binom{\frac{1}{2}}{k}(\frac{1}{2} - k)
\end{aligned}$$

Damit lässt sich nun die Differentialgleichung (2.1) verifizieren:

$$\begin{aligned}(1-y)f'(y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k+1}(k+1)(-1)^{k+1}y^k - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cdot k\cdot(-1)^k y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2}-k)\binom{\frac{1}{2}}{k}\cdot(-1)\cdot(-y)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\cdot k\cdot(-y)^k \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-y)^k \\ &= -\frac{1}{2}f(y)\end{aligned}$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt also $(1-y)f'(y) + \alpha f(y) = 0$ und damit ergibt sich mit der Quotientenregel

$$\begin{aligned}(\frac{f(y)}{(1-y)^{\alpha}})' &= \frac{(1-y)^{\alpha}f'(y) + \alpha(1-y)^{\alpha-1}f(y)}{(1-y)^{2\alpha}} \\ &= \frac{(1-y)f'(y)+\alpha f(y)}{(1-y)^{\alpha+1}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Deshalb können sich Zähler und Nenner nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, d.h. $f(y) = c\cdot(1-y)^{\alpha}$. Durch Einsetzen (z.B. $y=0$) erhält man $c=1$, deshalb ist

$$f(y) = \sqrt{1-y}.$$

Sei deshalb im Folgenden die Folge von Polynomen definiert durch

$$q_n(y) := \textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-y)^k.$$

Zur Erinnerung: Bislang wurde die Funktion nur auf dem Intervall (-1,1) betrachtet. Daher ist nur bekannt, dass die Folge der Polynome $q_n(y)$ in (-1,1) gegen $\sqrt{1-y}$ konvergiert (außerdem ist die Konvergenz natürlich gleichmäßig in jedem Intervall $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ für beliebige $\epsilon \in (0,1)$). Um die gleichmäßige Konvergenz sogar in [0,1] zu erhalten (wie bereits angedeutet ist der Punkt $y=1$ gerade die Knickstelle $x=0$ der Betragsfunktion), bleibt also noch zweierlei zu zeigen:
Erstens dass sich die Konvergenz der Folge $q_n(y)$ in $y=1$ stetig fortsetzen lässt, die Folge der Polynome hier also gegen $\sqrt{1-1}=0$ konvergiert, und
zweitens dass die Konvergenz in [0,1] auch gleichmäßig ist.
Für diese Betrachtung bedarf es eines kleinen Tricks:
Zunächst betrachtet man die Vorzeichen der Terme der Folge q_n. Für gerade k ist ja offensichtlich $(-1)^k$ positiv, für ungerade k ist es negativ. Anders verhält sich da der Binomialkoeffizient $\binom{\frac{1}{2}}{k}$, denn er ist für gerade $k>0$ negativ und für ungerade k positiv. Deshalb lässt sich also schreiben

$$(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k} = -|\binom{\frac{1}{2}}{k}| \qquad (k>0).$$

Damit ergibt sich für die Folge von Polynomen

$$
\begin{aligned}
q_n(y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k y^k \\
&= \binom{\frac{1}{2}}{0} (-y)^0 - \sum_{k=1}^{n} |\binom{\frac{1}{2}}{k}| y^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n} |\binom{\frac{1}{2}}{k}| y^k
\end{aligned}
$$

Offenbar handelt es sich hier für $0 \leq y \leq 1$ um eine monoton fallende Folge $q_1(y) \geq q_2(y) \geq q_3(y) \ldots$.
Außerdem ist für $0 \leq y < 1$ bekannt, dass

$$\lim_{n\to\infty} q_n(y) = \sqrt{1-y} \geq 0.$$

Aufgrund der Monotonie der Polynomfolge muss dann aber

$$q_n(y) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [0,1)$$

gelten.
Weil nun die q_n aber stetig in $y = 1$ sind, folgt die Aussage sogar für $y \in [0,1]$.
Da die Folge q_n für alle $0 \leq y \leq 1$ monoton und beschränkt ist, konvergiert sie folglich für eben jene y.
Betrachtet man nun $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(1)$, so erhält man aufgrund der Konvergenz der Folge in diesem Punkt auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |\binom{\frac{1}{2}}{k}|$.
Nun wiederum gilt aber sicher für alle k

$$|\binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k y^k| \leq |\binom{\frac{1}{2}}{k}| \quad \forall\ 0 \leq y \leq 1.$$

Damit ist eine Majorante für die Folge q_n gefunden und nach dem Majorantenkriterium bereits die gleichmäßige Konvergenz derselben nachgewiesen.
Der Rest ist jetzt schnell getan:
Die Stetigkeit von ${}_{n\to\infty} q_n(y)$ in $[0,1]$ ist bekannt, und außerdem, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(y) = \sqrt{1-y}$ in [0,1) gilt. Weil aber $\sqrt{1-y}$ ebenfalls stetig ist, muss bereits

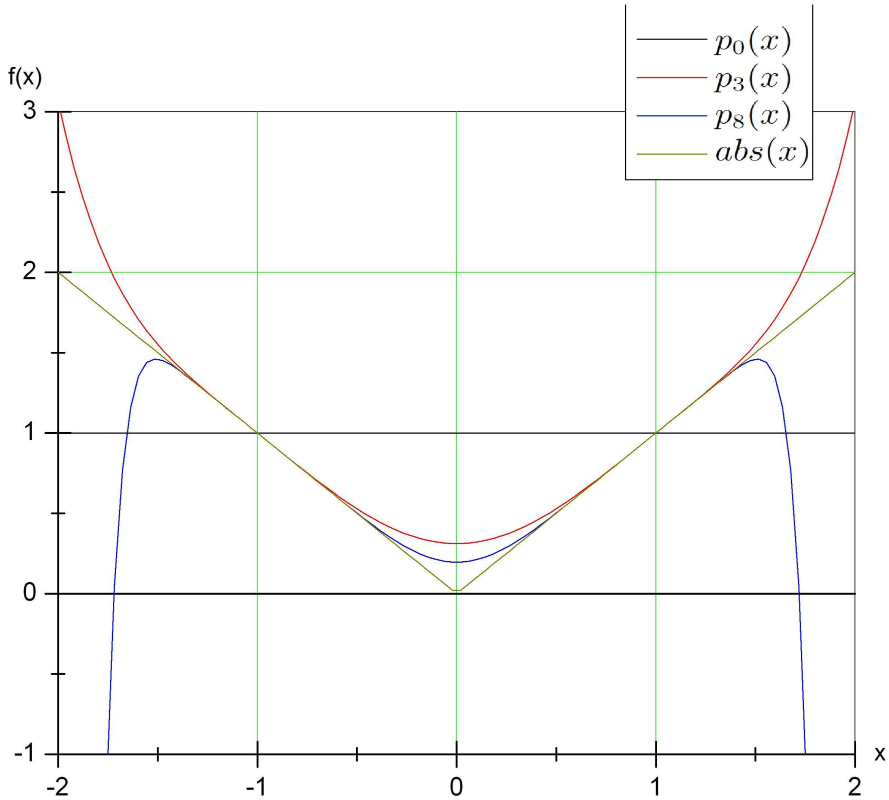
$$\lim_{n\to\infty} q_n(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

gelten.
Damit ist gezeigt, dass die Folge $q_n(y)$ in [0,1] gleichmäßig gegen $\sqrt{1-y}$ konvergiert.
Deshalb konvergiert aber die Folge von Polynomen $p_n(x) = q_n(1-x^2)$ gleichmäßig gegen |x| in [-1,1].

Zur Veranschaulichung sind auf der nächsten Seite einige der Folgenglieder zu sehen. Zur Erinnerung sei an dieser Stelle noch einmal gesagt, dass dabei die Beschriftung

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-y)^k$$

verwendet wurde.



An den Graphen der Funktionen sieht man wunderbar, dass:
1) Die Folge der Polynome in [-1,1] monoton fallend ist.
2) Die Funktionen gerade sind, d.h. symmetrisch bezüglich der y-Achse.
3) Das Verhalten der Funktionen außerhalb des Intervalls [-1,1] vollkommen chaotisch und unvorhersehbar ist.

Insgesamt muss man sagen, dass die Konvergenz jedoch eine sehr langsame ist. Im nächsten Kapitel wird eine weitere Folge von Polynomen angegeben, die im gleichen Intervall gegen die Betragsfunktion konvergiert, allerdings wird diese Folge monoton wachsend sein. Im Unterschied zu der hier durchgeführten Konstruktion werden die Polynome im Folgenden etwas willkürlich definiert, was allerdings einen weitaus effektiveren Beweis zur Folge haben wird.

3 Eine andere Variante

Ziel dieses Kapitels ist wiederum der Beweis der Proposition aus dem vorhergehenden Kapitel:
Proposition Auf dem Intervall [-1,1] existiert eine Folge von Polynomen

$$p_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die gleichmäßig gegen die Betragsfunktion |x| konvergiert.

Dazu betrachte man die folgende Folge von Funktionen $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) := f_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f_n^2(x)) \tag{3.1}$$

$$f_0(x) := 0 \tag{3.2}$$

Das ist tatsächlich schon die gesuchte Folge von Polynomen $f_n(x)$, allerdings muss diese Tatsache erst noch auf einigen Umwegen gezeigt werden.
Wie man leicht sieht, sind alle f_n Polynome.
Dann kann man folgende Äquivalenz zeigen:

$$\begin{aligned}(|x| - f_n(x)) \cdot (1 - \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}f_n(x)) &= |x| - \frac{1}{2}x^2 - f_n(x) + \frac{1}{2}f_n(x)^2 \\ &= |x| - (f_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f_n(x)^2)) \\ &= |x| - f_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wie bereits angesprochen, nähert sich die Polynomfolge von unten an die Betragsfunktion an, für $x \in [-1, 1]$ erfüllt sie also die Bedingung

$$0 \leq f_n(x) \leq |x|, \tag{3.4}$$

wie die folgende Induktion nach n zeigt:

Induktionsvoraussetzung: $0 \leq f_n(x) \leq |x|$
Induktionsbehauptung: $0 \leq f_{n+1}(x) \leq |x|$
Induktionsanfang: $n = 0 \Rightarrow f_n(x) \equiv 0 \Rightarrow Beh.$

Induktionsschritt: Laut Annahme ist $0 \leq f_n(x)$ und $0 \leq x^2 - f_n(x)^2$
Damit ist $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f_n(x)^2) \geq f_n(x) \geq 0$.
Außerdem gilt für $|x| \leq 1$:

$$\begin{aligned}|x| - f_{n+1}(x) &= (|x| - f_n(x)) \cdot (1 - \frac{1}{2}|x| - \frac{1}{2}f_n(x)) \\ &\geq (|x| - f_n(x)) \cdot (1 - |x|) \\ &\geq 0 \quad \Rightarrow |x| \geq f_{n+1}(x)\end{aligned}$$

Aus dieser Feststellung folgt nun auch leicht, dass die Folge f_n auf $[-1,1]$ monoton steigt, dass also $f_n \leq f_{n+1}$ gilt (nach (1.1)). Genauer folgt aus (3.3) und (3.4) folgende Ungleichung

$$0 \leq |x| - f_{n+1}(x) \leq (|x| - f_n(x))(1 - \frac{1}{2}|x|). \tag{3.5}$$

Durch eine weitere Induktion nach n erhält man sogar die Ungleichung

$$0 \leq |x| - f_n(x) \leq (1 - \frac{1}{2}|x|)^n \tag{3.6}$$

Die Abschätzung nach unten ist klar, die andere beweist man durch:
Induktionsvoraussetzung: $|x| - f_n(x) \leq (1 - \frac{1}{2}|x|)^n$
Induktionsbehauptung: $|x| - f_{n+1}(x) \leq (1 - \frac{1}{2}|x|)^{n+1}$
Induktionsanfang: $n = 0 \Rightarrow |x| \leq 1$ ist richtig, da $x \in [-1,1]$
Induktionsschritt:

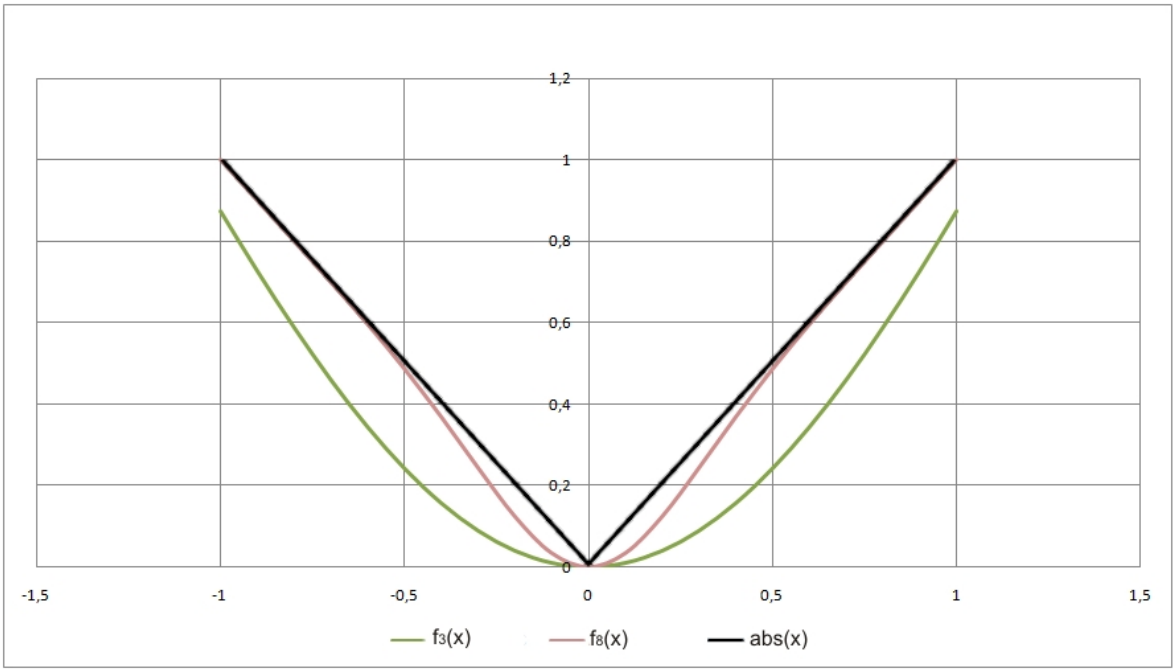
$$\begin{aligned} |x| - f_{n+1}(x) &\leq (|x| - f_n(x))(1 - \frac{1}{2}|x|) && \text{(nach (3.5))} \\ &\leq (1 - \frac{1}{2}|x|)^n(1 - \frac{1}{2}|x|) && \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}|x|)^{n+1} \end{aligned}$$

Die bereits gefundenen Eigenschaften der Polynomfolge reichen nun, um die Aussage zu beweisen. Wähle man dazu ein beliebiges $\epsilon \in (0,1)$ und bestimme ein $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, sodass $(1 - \frac{\epsilon}{2})^n < \epsilon$ für alle n > N erfüllt ist. Dann folgt

$$||x| - f_n(x)| < \epsilon \tag{3.7}$$

für eben jene n nach der folgenden Fallunterscheidung:
1) Für $|x| > \epsilon$ folgt die Aussage direkt aus (3.6), weil
$|x| - f_n(x) \leq (1 - \frac{1}{2}|x|)^n \leq (1 - \frac{\epsilon}{2})^n < \epsilon.$
2) Für $|x| \leq \epsilon$ gilt einfach $0 \leq |x| - f_n(x) \leq |x| \leq \epsilon.$

Zum Abschluss sind in der folgenden Abbildung zwei Folgenglieder zu sehen. Obwohl diese Folge monoton wächst, ist wieder der „Knick“ der Betragsfunktion bei $x = 0$ der kritische Punkt, wie man in dem Graphen von $f_8(x)$ leicht sehen kann.



Literatur

[1] Jürgen Appell, Martin Väth: Elemente der Funktionalanalysis. Vieweg+Teubner Verlag, 2008.

[2] Eberhard Freitag: Vorlesungen über die Analysis. Teil I + II.

[3] Wikipedia - die freie Enzyklopädie. http://de.wikipedia.org/wiki/Binomische_Reihe (Stand: 28.06.2009)