Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 8, Abgabe bis zum 29.05.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 29 Man zeige, dass es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von 0 gibt, in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sin(x - y^2 + z^3) - cos(x + y + z) + 1 &= 0 \\ sin(y + x^2 - z^3) + cos(x - y) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x, y) aufgelöst werden kann.

(4 Punkte)

Aufgabe 30 Man untersuche, ob die Gleichung $x^y = y^x$ in der Nähe des Punktes $(2, 4)$ nach x oder y auflösbar ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 31 Sei $M := \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]\}$. Was ist das Bild der Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2$,

$$x \mapsto e^x cos(y), \quad y \mapsto e^x sin(y)?$$

Ist die Abbildung auf das Bild injektiv? Wenn ja, bestimme die Umkehrabbildung von f. Ist die Abbildung global (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) umkehrbar?

(4 Punkte)

Aufgabe 32 Sei f die Abbildung $f : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}),\ f(M) = M^2$.

(a) Was ist die Ableitung von f? Hinweis: Die Ableitung wird am besten als lineare Abbildung $J(f, A) : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ angegeben. Hierbei kann $M(n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden.

(b) Hat f im Fall $n = 2$ eine lokale Umkehrabbildung in der Nähe der Punkte

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}?$$

(3+2 = 5 Punkte)