Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 7, Abgabe bis zum 22.05.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 25 Man berechne die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante der durch

$$F(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\ cos(\theta)\ sin(\varphi) \\ r\ sin(\theta)\ sin(\varphi) \\ r\ cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

definierten Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In welchen Punkten (r,θ,φ) ist die Matrix invertierbar?

(4 Punkte)

Aufgabe 26 (a) Man beweise die im Skript auf S.269 angegebene Formel für die Transformation des Laplace-Operators auf Polarkoordinaten:

$$\Delta^* g = \frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{(\partial \varphi)^2}.$$

(b) Als Anwendung bestimme man alle zweimal stetig differenzierbaren harmonischen Funktionen $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ (harmonisch: $\Delta f = 0$), die nur vom Radius $r := \sqrt{x^2+y^2}$ abhängen: $f(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$.

(3+3 = 6 Punkte)

Aufgabe 27 Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \mapsto (x^3 + 3x\ e^y,\ y - x^2),$$

ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 28 Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion, dh. sie ist eine Lösung der Laplace Gleichung $\Delta f = 0$:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = 0.$$

Sei A eine orthogonale $n \times n$-Matrix (dh. $A^t A = \mathbb{1}$). Man beweise, dass dann auch die Funktion $g(x) = f(Ax)$ harmonisch ist. Es genügt, diese Aufgabe für $n = 2$ zu behandeln. Für n beliebig gibt es 2 Zusatzpunkte.

(4 Punkte)