Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

# Übungen zur Analysis II SS 2009

## Blatt 6, Abgabe bis zum 15.05.2009 um 11:00 Uhr

**Aufgabe 21** Man berechne eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{2}xy \quad \text{auf dem Intervall } [0,1]$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 1$, indem man das in der Vorlesug beschriebene Iterationsverfahren mit der konstanten Startfunktion $y(x) = 1$ durchführt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 22** Sei $n > 1$ eine ganze Zahl. Man zeige, dass es eine differenzierbare Funktion $y(x)$ auf $[0, a]$ für genügend kleines $a > 0$ gibt, deren Ableitung gleich der $n$-ten Potenz von $y(x)$ ist und so dass $y(0) > 0$ gilt. Wie sieht diese Funktion aus? Gibt es eine solche Funktion auch auf $[0, a]$ für beliebiges $a > 0$?

(4 Punkte)

**Aufgabe 23** Man untersuche, in welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ die folgenden Funktionen partiell differenzierbar sind und berechne ggf. die partiellen Ableitungen:

$$(a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ oder } y = 0 \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(b)\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad g(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 24** Betrachte die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige: Die Funktion ist in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. In $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ist sie beliebig oft stetig partiell differenzierbar. In $(0,0)$ ist sie zweimal partiell differenzierbar, aber es gilt

$$\partial_y \partial_x f(0,0) \neq \partial_x \partial_y f(0,0).$$

(4 Punkte)