Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 5, Abgabe bis zum 08.05.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 17 Sei $X \neq \emptyset$ ein metrischer Raum. Man zeige, dass $C(X) \cap B(X)$ (versehen mit der Supremumsnorm) vollständig ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 18 Sei f eine stetige Funktion auf dem Einheitsquadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ y \leq 1\}$, so dass $|f(x, y)| < 1$ für alle x und y gilt. Zeige, dass es eine stetige Funktion $g(x)$ auf $[0, 1]$ gibt, so dass

$$g(x) + \int_0^1 f(x, y)g(y)dy = exp(x^2).$$

Ist diese Funktion g eindeutig bestimmt? **Hinweis:** Fixpunktsatz

(4 Punkte)

Aufgabe 19 Es sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion.

(a) Man zeige, dass f genau dann eine kontrahierende Abbildung ist, wenn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) Man zeige mit dem Fixpunktsatz, dass die Gleichung $2x - sin(x) = \frac{1}{2}$ genau eine Lösung in $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt. Man gebe diese auf 2 Nachkommastellen genau an. Benutze zur Berechnung das iterative Verfahren, welches im Beweis vom Fixpunktsatz angegeben ist.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 20 Seien $(V, ||.||_V)$, $(W, ||.||_W)$ normierte Räume. Für eine lineare Abbildung $A \in Hom(V, W)$ definieren wir

$$||A|| = sup\{||Av||_W \mid v \in V,\ ||v||_V = 1\}.$$

Zeige: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $||A|| < \infty$,

(ii) A ist stetig,

(iii) A bildet Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen ab.

(4 Punkte)