Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 4, Abgabe bis zum 30.04.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 12 Finde einen beschränkten metrischen Raum (X, d), der nicht kompakt ist (natürlich mit Nachweis).

(3 Punkte)

Aufgabe 13 Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R}) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \textit{ stetig}\}$. Zeige mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes, dass f identisch verschwindet, falls $\int_a^b f(x)x^n = 0 \ \forall n \geq 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 14 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Man berechne das Integral

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx \right) dy.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 15 Man folgere aus dem Satz von Stone-Weierstraß, dass $C([a,b],\mathbb{R})$ (zusammen mit der Supremumsnorm) separabel ist. (Diese Aufgabe kann durch Aufgabe 16 ersetzt werden)

(4 Punkte)

Aufgabe 16* (Freiwillige Zusatzaufgabe, kann anstelle von Aufgabe 15 bearbeitet werden) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass $C(X, \mathbb{R})$ (zusammen mit der Supremumsnorm) separabel ist.

Hinweis: Man benutze Aufgabe 11. Der Beweis verläuft im Prinzip genauso wie im Spezialfall $X = [a, b]$.

(7 Punkte)