Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

# Übungen zur Analysis II SS 2009

## Blatt 3, Abgabe bis zum 24.04.2009 um 11:00 Uhr

**Aufgabe 8** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(x_n)$ eine darin konvergente Folge mit Grenzwert $x$. Zeige, dass die Menge $\tilde{X} := \{x, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ kompakt ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 9** Eine Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes $X$ heißt folgenabgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \in A$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, schon $x \in A$ gilt. Man zeige, dass eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn sie folgenabgeschlossen ist.

(3 Punkte)

**Aufgabe 10** Man identifiziere den Raum $M(n, R)$ der reellen $n \times n$-Matrizen mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ und versehe ihn so mit der euklidischen Metrik. Welche der folgenden Teilmengen sind kompakt?

(a) Die orthogonale Gruppe $O(n, \mathbb{R})$

(b) Die Lorentzgruppe $O(3, 1, \mathbb{R}) = \{M \in M(4, \mathbb{R}) \mid M \cdot B \cdot^t M = B\}$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2+2 = 4 Punkte)

**Aufgabe 11** Zeige: Jeder kompakte metrische Raum hat eine abzählbare dichte Teilmenge.

(4 Punkte)