Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 2, Abgabe bis zum 17.04.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 4 Es seien (X, d) und (X', d') zwei metrische Räume. Auf dem Produkt $X \times X'$ wird eine Metrik, die sogenannte Produktmetrik, durch

$$\tilde{d}((x, x'), (y, y')) = max(d(x, y), d'(x', y'))$$

definiert. Man zeige:

(a) $\tilde{d}$ ist eine Metrik.

(b) Die Diagonale

$$\Delta = \{(x, x') \in X \times X \mid x' = x\}$$

ist in $X \times X$ (versehen mit der Produktmetrik) abgeschlossen.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 5 (a) Ist die Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x^2 < 2 \\ 1 & \text{falls } x^2 > 2 \end{cases}$$

stetig?

(b) Welche der folgenden Funktionen lassen sich in den Ursprung $(0, 0)$ stetig fortsetzen?

$$(a)\ f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (b)\ g(x, y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

(1+4 = 5 Punkte)

Aufgabe 6 Sei $D = [a, b]$, $a < b$ und $C(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \text{ stetig }\}$. Betrachte die folgenden beiden Metriken:

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$
$$d_2(f, g) = max\{|f(x) - g(x)|\}$$

Zeige, dass jede Folge von Funktionen in $C(D)$, die bezueglich d_2 konvergiert, auch bezueglich d_1 konvergiert, dass aber die Umkehrung i.A. falsch ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 7 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und Y eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $Y = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

(4 Punkte)