

## Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 12, Abgabe bis zum 26.06.2009 um 11:00 Uhr

**Aufgabe 45** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige nicht-negative Funktion und

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z), a \leq z \leq b\}.$$

Man beweise die Volumenformel

$$\text{vol}(M) = \pi \int_a^b f^2(z) dz.$$

Und weil's so schön ist, berechne man gleich noch als Anwendung das Volumen der Kugel mit Radius  $r > 0$ :

$$K_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

(4+2 = 6 Punkte)

**Aufgabe 46** Man berechne das Volumen der Punktmenge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y + z)^2 + (y + z)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 47** Ein (materieller) Körper im  $\mathbb{R}^3$  wird definiert durch eine kompakte Punktmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  und eine positive stetige Funktion  $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}$ , die sogenannte Massendichte. Man bezeichnet

$$\mu = \int_K \rho(x) dx$$

als die Masse des Körpers,

$$\xi = \frac{1}{\mu} \int_K \rho(x) x dx$$

als seinen Schwerpunkt und

$$\theta(a_1, a_2) = \int_K \rho(x) ((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2) dx$$

als sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$ . Der Körper heißt homogen, wenn  $\rho$  konstant ist.

(a) Man berechne den Schwerpunkt der homogenen Halbkugel

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_3 \geq 0\}.$$

(b) Sei nun

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, |x_3| \leq 1\}$$

und  $\rho(x) = e^{c(x_1^2 + x_2^2)}$  mit reellen Konstanten  $R$  und  $c$ . Man berechne die Masse  $\mu$  des Körpers  $(K, \rho)$  und sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

(c) Es seien

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}, K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}.$$

Wie sind die Massendichten  $\rho_i$  der homogenen Körper  $(K_i, \rho_i)$ ,  $i = 1, 2$ , zu wählen, damit Massengleichheit erreicht wird, dh.  $\mu(K_1, \rho_1) = \mu(K_2, \rho_2)$ ?

(2+2+2 = 6 Punkte)