

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 11, Abgabe bis zum 19.06.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 41 Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \int_D xy \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

$$(b) \int_D x^2 \, dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\},$$

$$(c) \int_D \frac{2z}{(x+y)^2} \, dx dy dz, \quad D = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 3].$$

(2+2+2 = 6 Punkte)

Aufgabe 42 Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. Man berechne

$$\text{vol}(X) := \int_{\mathbb{R}^3} \chi_X(x) \, dx.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 43 Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, falls für jedes $C \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > C\}$ offen ist. Sie heißt oberhalbstetig, falls $-f$ unterhalbstetig ist. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Teilmenge.

(a) χ_M ist genau dann unterhalbstetig, wenn M offen ist.

(b) χ_M ist genau dann oberhalbstetig, wenn M abgeschlossen ist.

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 44 Wir übernehmen die Bezeichnungen von Aufgabe 43.

(a) Zeige: f ist genau dann stetig, wenn f und $-f$ unterhalbstetig sind.

(b) Sei $B_b^-(\mathbb{R}^n) := \{f \mid -f \in B_b^+(\mathbb{R}^n)\}$. Man folgere aus Teil (a):

$$B_b^-(\mathbb{R}^n) \cap B_b^+(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$$

.

(2+2=4 Punkte)