Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Blatt 1, Abgabe bis zum 09.04.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 1 Es sei X eine nichtleere Menge.

(a) Zeige, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik (die triviale Metrik) auf X definiert wird.

(b) Zeige: Jede Teilmenge von X ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

(c) Sei nun $(Y, \tilde{d})$ ein beliebiger metrischer Raum. Zeige, dass jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

(1+2+1 = 4 Punkte)

Aufgabe 2 Welche der folgenden Gleichheiten sind für beliebige Teilmengen A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ korrekt ($\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik)? Man bearbeite 4 der 6 Teilaufgaben.

(a) $(\overline{A})^\circ = A^\circ$,
(b) $\overline{A^\circ} = \overline{A}$,
(c) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$,
(d) $A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$,
(e) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
(f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3 Wir definieren vier verschiedene Metriken $d_* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch :

$$d_\infty(x,y) \;=\; \max_{1\le i\le n} |x(i)-y(i)| \qquad d_H(x,y) \;=\; \#\{i \mid x(i) \neq y(i)\}$$

$$d_1(x,y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x(i)-y(i)| \qquad d_2(x,y) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x(i)-y(i)|^2}$$

Dabei sei $x = (x(i))_{1\le i\le n},\ y = (y(i))_{1\le i\le n}$.

(a) Zeige, dass für d_∞ und für d_1 die Dreiecksungleichung gilt (die anderen Axiome einer Metrik glauben wir).

(b) Zeige: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$d_\infty(x,y) \;\le\; d_2(x,y) \;\le\; d_1(x,y) \;\le\; n \cdot d_\infty(x,y).$$

(c) Zeige, dass d_∞ und d_1 zur euklidischen Metrik d_2 äquivalent sind. Mit anderen Worten: eine Folge (x_j) konvergiert genau dann bezüglich d_2 gegen x, wenn (x_j) bezüglich d_∞ bzw d_1 gegen x konvergiert.

(d) Konstruiere eine Folge (x_j) im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich d_2 gegen 0 konvergiert, aber bezüglich d_H keine Nullfolge ist.

(1+2+2+1 = 6 Punkte)