

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg  
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

## Übungen zur Analysis II SS 2009

### Vorschläge für das Tutorium in der Woche ab dem 24.05

Der Satz über implizite Funktionen ist ein sehr wichtiger Satz der Analysis 2, aber erfahrungsgemäß auch schwierig zu verdauen. Hier sind einige unverbindliche Vorschläge für die Tutorien zu diesem Thema.

**Satz über implizite Funktionen** Manche Funktionen sind nicht *explizit* in der Form  $y = f(x)$ , sondern *implizit* in der Form  $F(x, y) = 0$  gegeben. Man diskutiere mit den Studenten das Beispiel

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Die Nullstellenmenge ist der Einheitskreis. Man löse nach  $x$  auf; man erhält  $y = f_{\pm}(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ . Offenbar gibt es in keiner ganzen Umgebung von  $x = \pm 1 \in \mathbb{R}^1$  eine reelle Lösung  $y = f(x)$ . Die Funktion  $y = f(x)$  muß also nicht überall existieren. Man wende den Satz für implizite Funktionen auf dieses Beispiel an und veranschauliche die Situation am Bild.

**Satz über die Umkehrfunktion** Man diskutiere diesen Satz anhand der Polarkoordinatentransformation. Ein anderes sehr einfaches Beispiel ist die Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$ .

Etwas komplizierter ist das folgende Beispiel:  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ . Man zeige:  $f$  ist in allen Punkten ein lokaler  $C^{\infty}$ -Diffeomorphismus. Man untersuche, ob sie ein globaler  $C^{\infty}$ -Diffeomorphismus ist.