Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Vorschläge für das Tutorium in der zweiten Woche

Man diskutiere einige einfache Beispiele von offenen und abgeschlossenen Mengen. Man sollte unbedingt klarmachen, dass die Eigenschaft *offen* für eine Menge nur Sinn ergibt, wenn man sagt, in welchem Raum die Menge offen ist.

Im Folgenden einige unverbindliche Ideen, was man mit den Studenten durchnehmen könnte:

Aufgabe (a) Man zeichne die Einheitsspäre im $\mathbb{R}^2$ bezüglich d_1, d_∞ und d_2 (Notationen von Aufgabe 3).

(b) Man zeige, dass im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_2)$ die Kugeln mit positivem Radius nicht abgeschlossen sind.

(b) Man zeige, dass es im metrischen Unterraum $(\mathbb{Q}, d_2)$ dagegen Kugeln mit positivem Radius gibt, die abgeschlossen sind.

Aufgabe Beweise, dass durch

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

auf dem Funktionenraum $F = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ eine Metrik definiert wird.

Aufgabe Es sei X ein metrischer Raum, A eine Teilmenge. Zeige:

(a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(b) Sind A, B Teilmengen mit $A \subset B$, so gilt $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Aufgabe Welche der Mengen sind offen, abgeschlossen in $(\mathbb{R}^2, d_2)$?

(a) $\{(x,y) \mid x^3 + y^2 = 1\}$,

(b) $\{(x,y) \mid y \neq 0,\ x + \frac{1}{y} = 1\}$.

Aufgabe (zu lang für eine Sitzung) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige (a) Die leere Menge $\emptyset$ und X sind offen. (b) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen in X ist offen. (c) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen in X ist offen. (d) Bleibt die Aussage von (c) richtig, wenn man beliebig viele offene Mengen zuläßt?