Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Klausurvorbereitung

Dieser Wiederholungszettel soll die Vorbereitung auf die Klausur erleichtern. Eine weitere sehr gute Vorbereitung ist natürlich die Beschäftigung mit den Übungszetteln. Im Vergleich zu der Analysis 1 Klausur haben wir den Multiple choice Teil verkürzt und vereinfacht.

Zur Wertung beim Multiple choice Teil: Jedes richtige Kreuz gibt 2 Punkte, jedes falsche Kreuz gibt -2 Punkte. Als Enthaltung (0 Punkte) zählt entweder (a) keine Kreuze oder (b) beide Kreuze. In der Addition aller Multiple choice Punkte kann man aber im schlechtesten Fall 0 Punkte erreichen.

Multiple choice

(1) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) im Punkt a total differenzierbar. Ist dann f auch stets partiell differenzierbar in a?

JA ☐ ☐ NEIN

(2) Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen), die im Punkt $a \in D$ partiell differenzierbar ist, immer stetig in a?.

JA ☐ ☐ NEIN

(3) Die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes X ist kompakt.

JA ☐ ☐ NEIN

(4) Der metrische Raum $X = (0, 1)$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist vollständig.

JA ☐ ☐ NEIN

(5) Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

JA ☐ ☐ NEIN

(6) Der metrische Raum $C([0, 1])$ mit der Metrik $d(f, g) = max_{0 \leq x \leq 1}|f(x) - g(x)|$ ist vollständig.

JA ☐ ☐ NEIN

(7) Bildet die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^3 y, y)$ eine kleine offene Umgebung von $(0, 0)$ diffeomorph auf eine kleine Umgebung von $(0, 0)$ ab?

JA ☐ ☐ NEIN

(8) Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ habe in 0 ein relatives Minimum. Ist dann die Hessematrix von f in 0 positiv definit?

JA ☐ ☐ NEIN

Definitionen

D1 Man definiere, wann ein metrischer Raum kompakt ist.

D2 Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes Y. Was versteht man unter einem Randpunkt von A?

Sätze

S1 Was besagt der Approximationssatz von Stone-Weierstraß?

S2 Was besagt der Banachsche Fixpunktsatz?

Aufgaben

Aufgabe 1 Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Die Funktionalmatrix von f sei in jedem Punkt invertierbar. Man gebe ein Beispiel an, in dem f dann nicht injektiv ist.

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man drücke die partiellen Ableitungen von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r, \varphi) := f(rcos\varphi, rsin\varphi)$, durch die partiellen Ableitungen von f aus.

Aufgabe 3 Man zeige: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus.

Aufgabe 4 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : A \to \mathbb{R}_+$ stetig und K das Kompaktum $K = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Man zeige

$$vol(K) = \int_A f(x)dx.$$

Aufgabe 5 Man bestimme die Jacobimatrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto 3x^2y + exp(xz^2) + 4z^3.$$

Aufgabe 6 Man berechne die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^3 - 3xy^2$, bis zu Gliedern einschließlich zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt $\zeta = (1, 1)$.

Aufgabe 7 Man untersuche die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 8 Läßt sich die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ stetig in den Nullpunkt fortsetzen?