Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 9

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 34 Ein Extremwert dieser Funktion muß Nullstelle des Gradienten sein. Mit den Ableitungen

$$\partial_x f(x,y) = 4x(x^2+y^2-4), \quad \partial_y f(x,y) = 4y(x^2+y^2-4),$$

die simultan 0 sein müssen, führt das auf $x = y = 0$ oder $x^2 + y^2 = 4$.

Der Punkt $(0,0)$: Man teste, ob die zweiten Ableitungen $<$ oder $>$ 0 sind. f hat in $(0,0)$ ein lokales Minimum.

An (x_0, y_0) mit $x_0^2 + y_0^2 = 4$: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt $f(x,y) = (x^2+y^2-4)^2 - 16 \geq -16 = f(x_0,y_0)$. Also nimmt f im Punkt (x_0,y_0) ein globales (und damit natürlich auch lokales) Minimum an.

Da $f(x,0) = (x^2-8)x^2 \to +\infty$ für $x \to +\infty$, hat f kein globales Maximum.

Aufgabe 35 Die Berechnung der Ableitungen zeigt, dass im Nullpunkt ein kritischer Punkt vorliegt. Die Determinante der Hessematrix ist dort $4\lambda - 1$. Bei $\lambda > \frac{1}{4}$ liegt ein Minimum, bei $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ein Sattelpunkt.

Der Fall $\lambda = \frac{1}{4}$: Setzt man $\lambda = 1/4$, so gilt die Abschätzung $f(x,y) > 1 + (x + y/2)^2$ für $xy \neq 0$, also $f(x,y) > 1 = f(0,0)$ für $xy \neq 0$. Dito für $x = 0$ oder $y = 0$, dh. $f(x,y) > 1 = f(0,0)$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Also liegt für $\lambda = \frac{1}{4}$ im Nullpunkt ein globales Minimum.

Es gibt aber noch weitere kritische Punkte. Aus $\nabla f(x,y) = 0$ folgt nämlich $xye^{xy} = -2x^2 = -2\lambda y^2$. Also muß $x = -\sqrt{\lambda} y$ gelten. Bezeichnung $\sqrt{\lambda} = l$. Eingesetzt in $xe^{xy} + 2\lambda y = 0$ ergibt das $ye^{-ly^2} = 2l$. Lösungen $y \neq 0$ liegen nur dann vor, wenn $l < \frac{1}{2}$ ist. Man erhält in diesem Fall zwei Lösungen (x_0, y_0), wobei

$$y_0 = \sqrt{-ln(2l)/l}.$$

Die Berechnung der Determinante der Hessematrix im Punkt (x_0, y_0) liefert $16\lambda y_0^2 > 0$, also liegt in den Punkten $\pm(x_0, y_0)$ ein lokales Minimum vor (beachte, dass f symmetrisch zum Nullpunkt ist).

Insgesamt erhält man folgendes Bild: Für $\lambda \geq \frac{1}{4}$ liegt im Nullpunkt ein globales Minimum (beachte, dass die Abschätzung bei $\lambda = \frac{1}{4}$ tatsächlich für alle $\lambda \geq \frac{1}{4}$ gilt!). Für $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ gibt es dagegen zwei Minima in den Punkten

$$\pm(-ly_0, y_0),\ y_0 = \sqrt{-ln(2l)/l}.$$

Der Nullpunkt ist in diesem Fall kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt.

Aufgabe 36 Wir suchen alle Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - x_2^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

Die Nullstellenmenge von g ist die 2-Sphäre S^2, dh. die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

Die Bedingungen für den Satz über Lagrange Multiplikatoren sind erfüllt. Die Jacobimatrix von g lautet

$$J(g, x) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

und hat für alle $x \in S^2$ den vollen Rang $m = 1$.

Nach dem Satz über Lagrange Multiplikatoren sind die Extremwerte unter den Lösungen des Gleichungssystems

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \text{ und } g(x) = 0$$

zu suchen. Das sind vier Unbekannte x_1, x_2, x_3, λ und vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x_3 &= 2\lambda x_1 \\ -2x_2 &= 2\lambda x_2 \\ 2x_1 &= 2\lambda x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung.

1.Fall: $\lambda = 1$. Man erhält die beiden Kandidaten

$$p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

In beiden Punkten nimmt f den Funktionswert 1 an.

2.Fall: $\lambda = -1$. Hier erhält man als Kandidaten alle Punkte

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Die Funktion nimmt überall den Wert -1 an.

3.Fall: $\lambda \neq \pm 1$. Es gibt keine Punkte, die die Bedingungen erfüllen.

Da S^2 kompakt ist, **muß** die Funktion f darauf ein globales Maximum und Minimum annehmen. Die Kandidaten sind oben aufgelistet. Man sieht, dass es sich bei p und q um die einzigen (globalen und lokalen) Maxima auf S^2 handelt und bei den Punkten auf der Kreislinie$S$ um die (globalen und lokalen) Minima.