Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 8

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 29 Wir müssen überprüfen, ob die Bedingungen für den Satz über implizite Funktionen erfüllt sind. Die Abbildung

$$f(z,x,y) = \begin{pmatrix} f_1(z,x,y) \\ f_2(z,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin(x-y^2+z^3) - cos(x+y+z) + 1 \\ sin(y+x^2-z^3) + cos(x-y) - 1 \end{pmatrix}$$

ist stetig differentierbar und es gilt $f(0,0,0) = 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen soll man die Abbildung $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_0(x,y) := f(0,x,y)$ betrachten

$$f_0(x,y) = \begin{pmatrix} sin(x-y^2) - cos(x+y) + 1 \\ sin(y+x^2) + cos(x-y) - 1 \end{pmatrix}$$

und überprüfen, ob die Jacobi Matrix dieser Abbildung im Punkt $(0,0)$ invertierbar ist. Man berechnet

$$J(f_0,(x,y)) = \begin{pmatrix} cos(x-y^2) + sin(x+y) & cos(x-y^2)(-2y) + sin(x) + y \\ cos(y+x^2)2x - sin(x-y) & cos(y+x^2) + sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $(0,0)$ gilt

$$J(f_0,(0,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist invertierbar.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es nun Umgebungen $A \subseteq \mathbb{R}$ von $a = 0$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ von $b = (0,0)$, so dass in der Umgebung

$$U := A \times B = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in B,\ z \in A\}$$

das gegebene Gleichungssystem nach (x, y) auflösbar ist.

Aufgabe 30 Man rechnet aus, dass $\nabla f(2,4) \neq 0$ ist für die Abbildung $f(x,y) = x^y - y^x$. Daher ist die Gleichung in einer Umgebung von $(2,4)$ sowohl nach x als auch nach y auflösbar.

Aufgabe 31 Für $(x,y) \in M$ gilt für die Bildpunkte (u,v) $u^2 + v^2 = exp(2x)sin^2(y) + exp(2x)cos^2(y) = exp(2x)$, dh. das Bild liegt in dem Kreisring mit innerem Radius e und äußerem Radius e^2. Die Abbildung bildet surjektiv auf diesen Kreisring ab: Dazu löse man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u &= exp(x)cos(y) \\ v &= exp(x)sin(y) \end{aligned}$$

nach x und y auf:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}ln(u^2+v^2) \ \in [1,2] \\ y &= arctan(\frac{v}{u}) \ \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Die Abbildung ist aber nicht global umkehrbar, da der Arcustangens mehrdeutig ist.

Beachte: Die Jacobi Matrix dieser Abbildung und ihre Determinante sind gegeben durch

$$J(f,x) = \begin{pmatrix} exp(x)cos(y) & -exp(x)sin(y) \\ exp(x)sin(y) & exp(x)cos(y) \end{pmatrix}, \quad det(J(f,x)) = exp(2x) > 0.$$

Also ist die Abbildung in jedem Punkt lokal umkehrbar, aber eben nicht global.

Aufgabe 32 (a) Wir berechnen die Ableitung von f in einem Punkt $A \in M(n, \mathbb{R})$. Es ist

$$f(A+M) = (A+M)(A+M) = A^2 + AM + MA + MM.$$

Nach der Definiton der totalen Differenzierbarkeit (vgl S. 264 Skript) sollten wir diesen Ausdruck in einen Term $f(a)$ (hier natürlich A^2), den Term für die lineare Abbildung (die gegeben ist durch die Jacobimatrix) und einen Restterm aufspalten. Wir definieren

$$J(f, A) : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}),\ M \mapsto AX + XA$$

und setzen als Restterm

$$R(M) = M^2.$$

Wir müssen nachweisen, dass dieser Restterm von der Ordnung $o(M)$ ist. Wir ziehen aus der Matrix $R(M)$ die Konstante $||M||$ raus:

$$MM = ||M||r(M)$$

mit

$$||r(M)|| = ||M||^{-1}||MM|| \leq ||M||^{-1}\sqrt{n}||M|| \cdot ||M|| = \sqrt{n}||M||$$

wobei wir (a) die Idenfikation $M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ benutzt und $M(n, \mathbb{R})$ mit der Norm

$$||M|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}^2}$$

versehen haben und (b) die Ungleichung $||AB|| \leq \sqrt{n}||A|| \cdot ||B||$ benutzt haben. Also gilt $r(M) \to 0$ für $M \to 0$ und der Restterm ist von der Ordnung $o(M)$. Also ist die Ableitung tatsächlich durch

$$J(f, A)(M) = AM + MA$$

gegeben.

(b) Setzt man nun für A die beiden Matrizen ein, sieht man sofort, dass die lineare Abbildung $J(f, A)$ für $A =$ Einheitsmatrix invertierbar ist und im anderen Fall nicht. Im zweiten Fall macht der Satz über die Umkehrfunktion also keine Aussage. Allerdings ist

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für alle x, also ist die Abbildung in keiner noch so kleinen Umgebung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ injektiv und damit umkehrbar.