Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 7

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 26 b Die Bedingung *hängt nur vom Radius ab* bedeutet:

$$\frac{\partial(f \circ h)}{\partial \varphi} = 0,$$

wobei h die Transformation auf Polarkoordinaten ist. $\Delta f = 0$ ist wegen der Surjektivität von h auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ äquivalent zu $(\Delta f) \circ h = 0$. Setzt man $d = \frac{\partial(f \circ h)}{\partial r}$, so erhält man die DGL

$$d' + \frac{d}{r} = 0$$

mit Lösung $d(r) = \frac{c_1}{r}$, also

$$(f \circ h)(r, \varphi) = c_1 log(r) + c_2.$$

Offensichtlich sind alle solchen Funktionen harmonisch und unabhängig von φ.

Aufgabe 27 Die Abbildung ist bijektiv. Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^2$ muß also genau ein $x, y \in \mathbb{R}^2$ existieren mit $f(x, y) = (u, v)$. Das ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$u = x^3 + 3xe^y$$
$$v = y - x^2$$

und das ist wiederum äquivalent zu

$$3xe^{v+x^2} + x^3 - u = 0$$
$$y = x^2 + v.$$

Die Abbildung

$$g : x \mapsto 3xe^{v+x^2} + x^3 - u$$

ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Die Ableitung ist positiv, daher ist die Funktion streng monoton wachsend, also injektiv. Da $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$ nimmt die Funktion wegen des Zwischenwertsatzes jede reelle Zahl an. Es existiert also ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$. Also hat das obige Gleichungssystem genau eine Lösung, also ist die Abbildung f bijektiv.

Wir müssen noch zeigen, dass die Jacobi-Matrix in jedem Punkt invertierbar ist. Die Matrix ist gegeben durch

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3e^y & 3xe^y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist > 0, also ist die Matrix überall invertierbar.

Aufgabe 28 Nach der Kettenregel ist

$$\nabla g(x) = \nabla f(Ax)A$$

da die Jacobi Matrix einer linearen Abbildung einfach die entsprechende Matrix A ist. Komponentenweise:

$$\partial_i g(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(Ax)A_{ji}.$$

Für den Laplaceoperator brauchen wir nicht die gemischten zweiten Ableitungen. Es ist

$$\partial_i^2 g(x) = \partial_i(\sum_{j=1}^{n} \partial_j f(Ax)A_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\partial_i(\partial_j)f(Ax)).$$

Wende nun die Kettenregel auf die folgende Situation an:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\partial_j f} \mathbb{R}$$

und bezeichne die Zusammensetzung mit h. Aus der Kettenregel folgt

$$\partial_i(\partial_j f(Ax)) = \partial_i h(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k \partial_j f(Ax) A_{ki},$$

also

$$\partial g_i^2 g(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \partial_j f(Ax) A_{ki} A_{ji}.$$

Damit ist

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \partial_j f(Ax) \sum_{i=1}^{n} A_{ki} A_{ji}.$$

Wegen der Orthogonalität von A gilt aber

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki} A_{ji} = \delta_{kj}$$

und die schreckliche Summe kollabiert zu

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \partial_j f(Ax) \delta_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i f(x) = \Delta f(x).$$

Bemerkung: Viele Differentialgleichungen haben solche Symmetrien. Beispielsweise ist die Diracgleichung invariant unter Transformationen der Lorentzgruppe.