Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 6

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 21 Unsere DGL ist durch die Funktion $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{1}{2}xy$ gegeben. Diese ist auf ihrem Definitionsbereich in y-Richtung global Lipschitz stetig:

$$|f(x,u) - f(x,v)| = \frac{1}{2}|x||u-v| \leq \frac{1}{2}|u-v|.$$

Das Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf liefert nun von irgendeiner Startfunktion ausgehend als Grenzwert die Lösung unserer DGL. Für $c = y(0) = 1$ und $y_0 \equiv 1$ lautet die Iteration

$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x f(t, y_k(t))dt = 1 + \int_0^x \frac{t}{2} y_k(t)dt.$$

Die ersten Schritte ergeben

$$y_1(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$y_2(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^4$$

und man vermutet

$$y_k(x) = \sum_{i=0}^{k} (\frac{(x/2)^{2i}}{i!}.$$

Diese Vermutung zeigt man mit vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ist $y_0(x) = 1$. Der Induktionsschritt (mit einigen Auslassungen):

$$\begin{aligned}
y_{k+1}(x) &= 1 + \int_0^x \frac{t}{2} y_k(t) dt \\
&= 1 + \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(\frac{t}{2})^{2i+1}}{i!} \right) dt \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{\left[\frac{2}{2i+2} (\frac{t}{2})^{2i+2} \right]_0^x}{i!} \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{(\frac{x}{2})^{2(i+1)}}{(i+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{k+1} \frac{(\frac{x}{2})^{2i}}{i!}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2i}}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^i}{i!} = exp(\frac{x^2}{4}).$$

Aufgabe 22 Ich berechne einfach die Lösung. Die Bedingung *a genügend klein* stellt sicher, dass wir eine Lipschitz-Konstante haben und daher eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage (ohne Beweis). Sei $y(x)$ mit $y'(x) = y(x)^n \Leftrightarrow dy/y^n = dx \Leftrightarrow d(\frac{y^{-n+1}}{1-n}) = dx \Leftrightarrow y^{-n+1} = (1-n)x + c$. Die Konstante c ergibt sich mit $x = 0$ zu $c = 1/y(0)^{n-1} > 0$. Die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{((1-n)x + c)^{n-1}}$$

löst die DGL $y' = y^n$, $y(0) = c^{-1/(n-1)}$ im Intervall $[0, \frac{c}{n-1})$. Sie ist die einzige solche Funktion nach Picard-Lindelöf.

Zur letzten Frage: Gibt es eine solche Funktion auch für beliebiges a? Die Fragestellung läßt sich hier auf zwei verschiedene Wege interpretieren. Beide sind zulässig.

1.) Man darf seinen Anfangswert $y(0)$ dem a anpassen. Wählt man $y(0)$ geeignet, so ist obige Lösung auf dem Intervall $[0, a]$ definiert und liefert wieder eine Lösung.

2.) $y(0)$ ist vorgegeben und darf nicht a angepaßt werden. Für $x \to \frac{c}{n-1}$ geht die Funktion $y(x) = \frac{1}{((1-n)x+c)^{n-1}}$ aber gegen ∞, also ist sie keine Lösung auf $[0, a]$ für allgemeines a. Die Begründung, dass es keine andere Funktion geben kann, die eine Lösung ist und eingeschränkt auf ein genügend kleines Intervall $[0, \tilde{a}]$ mit der Funktion $y(x)$ übereinstimmt, ist etwas komplizierter, da die Eindeutigkeit in der Vorlesung nur unter sehr starken Bedingungen bewiesen wurde.