Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 5

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 17 Die Idee: Zeige, dass $B(X)$ vollständig ist. Damit konvergiert jede CF in $C(X) \cap B(X)$ gegen ein Element in $B(X)$. Mit Satz 5.2 (gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind stetig) folgt die Behauptung.

Aufgabe 18 Da $[0, 1]$ kompakt ist, ist $C(X) = C(X) \cap B(X)$ und damit vollständig. Wir dürfen den Fixpunktsatz also anwenden. Betrachte die Abbildung $O : C([0, 1]) \to C([0, 1])$,

$$O(g)(x) = exp(x^2) - \int_0^1 f(x, y)g(y)dy.$$

Ein Fixpunkt dieser Abbildung ist eine Funktion, wie wir sie suchen. Wenn wir also zeigen, dass O kontrahierend ist, haben wir eine eindeutige Funktion g wie gewünscht gefunden.

Es gilt

$$|O(f_1)(x) - O(f_2)(x)| = \left| \int_0^1 f(x, y)(f_2(y) - f_1(y))dy \right|.$$

Da Q kompakt ist, nimmt $f(x, y)$ sein Maximum an und es gilt $M := max|f(x, y)| < 1$. Also ist das Integral

$$\leq \int_0^1 M|f_2(y) - f_1(y)|dy \leq M \ max|f_2(y) - f_1(y)| = M||f_2 - f_1||.$$

Also existiert ein eindeutiger Fixpunkt.

Aufgabe 18 (a) Sei f kontrahierend, also

$$|f(x) - f(y)| < q|x - y|$$

für ein $0 \leq q < 1$ und x,$y \in [a, b]$. Daher gilt

$$|f'(x)| = \lim_{y \to x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq q < 1.$$

Umgekehrt: Sei $|f'(x)| < 1 \ \forall x \in [a, b]$. Da f' stetig ist, nimmt es auf $[a, b]$ sein Maximum $0 \leq q < 1$ an. Nach dem Satz von Rolle existiert für alle $x < y \in [a, b]$ ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Daher gilt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq q|x - y|.$$

Da der Wertebereich in $[a, b]$ liegt, folgt die erste Aussage.

(b) Eine Lösung von $2x - sin(x) = \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu einem x, dass $x = \frac{1}{2}sin(x) + \frac{1}{4}$ erfüllt, dh. zu einem Fixpunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}sin(x) + \frac{1}{4}$. Wir müssen zeigen, dass f kontrahierend ist, dh. $|f'(x)| < 1$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Das ist aber offensichtlich.

Nach dem im Skript beschriebenen Verfahren ist die Abweichung zwischen dem exakten Wert x und dem im i-ten Iterationsschritt erhaltenen Wert x_i gegeben durch

$$|x - x_i| \leq \frac{q^i}{1 - q}|x - x_0|.$$

Da $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ kann man $q = 1/2$ wählen. Wenn wir $x_0 = 0$ als Startwert wählen, erhalten wir $x_1 = \frac{1}{4}$ und damit insgesamt

$$|x - x_i| < \frac{(\frac{1}{2})^i}{1 - \frac{1}{2}}|x_0 - x_1| = \frac{2}{2^i}\frac{1}{4}.$$

Da der Fehler $|x - x_i| < \frac{1}{1000}$ sein soll, müssen wir mindestens $i = 8$ Iterationsschritte wählen. Eine blöde Rechnung liefert $x \sim 0.48122\ldots$.

Aufgabe 19 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) steht in jedem Buch. Zu (iii): Sei A stetig und x_n CF. Wegen $||Ax_n - Ax_m|| \leq ||A| \cdot |||x_n - x_m||$ ist dann auch (Ax_n) eine CF. Umgekehrt: A bilde CF auf CF ab und sei nicht stetig, dh. $||A|| \not< \infty$, dh. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in V$ mit $||x_n|| = 1$ und $||Ax_n|| > n$. Definiere eine Folge y_n durch

$$y_n = \begin{cases} 0 & n \equiv 0(2) \\ \frac{x_n}{n} & n \equiv 1(2). \end{cases}$$

Das ist eine NF und damit auch eine CF. Für n gerade ist aber $||Ay_n|| > 1$ und $||Ay_{n+1}|| = 0$, also kann (Ay_n) keine CF sein. Widerspruch.