Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 4

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 12 Sei X eine unendliche Menge mit der diskreten Metrik versehen. Dann ist X zwar beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Aufgabe 13 Zunächst folgert man, dass dann auch

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = 0$$

für alle Polynome p. Denn sei $p(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ ein Polynom, so gilt wegen der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = a_n \int_a^b f(x)x^n dx + \dots a_0 \int_a^b f(x)dx = 0.$$

Nach dem Approximationssatz gibt es zu jedem f eine Folge von Polynomen p_k, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Man betrachte nun die Folge fp_k. Diese konvergiert gleichmäßig gegen f^2. Da man bei gleichmäßiger Konvergenz Integration und Limesbildung vertauschen darf, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)dx &= \int_a^b \lim_{k\to\infty} (f(x)p_k(x))dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_a^b f(x)p_k(x)dx \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wenn aber das Integral über die stetige, nichtnegative Funktion f^2 Null ist, so ist f^2 und damit f die Nullfunktion.

Aufgabe 14 Zunächst berechnen wir als Hilfslemma die Stammfunktion von $(-a,a) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{a^2 - x^2}$ für $a > 0$. Man substituiere $x = a\ sin(t)$ mit $-a < x < t$ und $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\int_a^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a\ \sin(t))^2} d(a\ sin(t)) \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\sqrt{1 - sin^2(t)} a\ \cos(t) dt \\
&= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2(t) dt \\
&= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + cos(2t)}{2} dt \\
&= \frac{a^2}{2} [t + \frac{1}{2} sin(2t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{a^2}{2} \pi.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun das gewünschte Integral: Es ist

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dx \right) dy. = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx \right) dy.$$

Das Integral nach dx ist von der soeben untersuchten Form mit $a = \sqrt{1 - y^2}$. Damit gilt

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2} (1 - y^2) dy = \frac{2\pi}{3},$$

also genau die Hälfte des Volumens der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 15 Ist als Spezialfall in Aufgabe 16 enthalten. Hier die Idee für $X = [a, b]$: Aufgrund des Approximationssatzes liegen die reellen Polynome dicht. In diesem Raum liegen aber wiederum die Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht. Das ist aber eine abzählbare Menge. Man vervollständige die Details...

Aufgabe 16 Da X kompakt ist, ist X nach Aufgabe 11 separabel. Für alle $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ existiert somit ein x_n aus der abzählbaren dichten Teilmenge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $d(x, x_n) < \epsilon$. Definiere eine Folge von Funktionen $g_n \in C(X, \mathbb{R})$ durch $g_n(x) = d(x, x_n)$. Für eine beliebige endliche Menge an Indizes $(n_1, \ldots, n_k)$ sei dann $g_{n_1,\ldots,n_k} := g_{n_1}(x) \cdots g_{n_k}(x)$ und A sei die Menge aller endlichen Linearkombinationen solcher Funktionen:

$$A := \{a + \sum_{(n_1,\ldots,n_k)} a_{n_1,\ldots,n_k} g_{n_1,\ldots,n_k}(x) \mid a,\ a_{n_1,\ldots,n_k} \in \mathbb{R}\}.$$

Das ist eine Unteralgebra, die punktetrennend ist: Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $d(x, y) = 2\epsilon > 0$. Nach Definition ist $g_n(x) < \epsilon$. Es ist aber

$$g_n(y) = d(y, x_n) \geq d(x, y) - d(x, x_n) \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,$$

also $g_n(x) \neq g_n(y)$.

Damit können wir Stone-Weierstraß anwenden: A liegt also dicht in $C(X, \mathbb{R})$. Der Raum der rationalen Linearkombinationen

$$A_{\mathbb{Q}} := \{a + \sum_{(n_1,\ldots,n_k)} a_{n_1,\ldots,n_k} g_{n_1,\ldots,n_k}(x) \mid a,\ a_{n_1,\ldots,n_k} \in \mathbb{Q}\}$$

ist abzählbar und dicht in A, also ist $A_{\mathbb{Q}}$ die gesuchte abzählbare und dichte Teilmenge in $C(X, \mathbb{R})$.