Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 3

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 8 Man wähle eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$. Da x_n gegen x konvergiert, befinden sich fast alle Folgenglieder in einer ϵ-Kugel um x, die in einer der der Mengen aus der Überdeckung enthalten ist. Die restlichen endlich vielen Folgenglieder kann man natürlich mit endlich vielen Mengen aus der offenen Überdeckung verarzten.

Aufgabe 10 (a) $O(n, \mathbb{R})$ ist kompakt. Wir zeigen Beschränktheit und Abgeschlossenheit. Nach Definition ist $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = AA^t = \mathbb{1}\}$. Die Abbildung $f : A \to {}^tAA$ ist stetig mit Bild $\{\mathbb{1}\}$. Diese einpunktige Menge ist abgeschlossen. Da f stetig ist, ist das Urbild abgeschlossen. Das Urbild ist aber gerade $O(n, \mathbb{R})$.

Zur Beschränktheit: Es ist $||A||^2 =$ Summe der Einträge der Matrix ${}^tAA$. Da ${}^tAA = \mathbb{1}$ ist das gerade n. Also liegen alle Matrizen von $O(n, \mathbb{R})$ in einer Kugel mit Radius $\sqrt{n}$ um die Nullmatrix.

(b) Die Lorentzgruppe ist nicht kompakt. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ liegen etwa die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}$$

in $O(3, 1, \mathbb{R})$. Damit ist sie nicht beschränkt.

Aufgabe 11 Sei X kompakt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Überdeckung, die entsteht, indem man um jeden(!) Punkt aus X eine offene Kugeln mit Radius $1/n$ zieht: $\mathfrak{B}(1/n) = \{U(x, 1/n) \mid x \in X\}$. Da X kompakt ist, überdeckt schon eine endliche Teilmenge $\mathfrak{B}'(1/n)$ davon X. Sei Z_n die Menge der Mittelpunkte der offenen Kugeln in $\mathfrak{B}'(1/n)$. Die Vereinigung Z aller Z_n ist eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen, also abzählbar. Z liegt dicht in X.