Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 2

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 4 (a) trivial

(b) Dazu zeigt man, dass $Y := (X \times X') - \Delta$ offen ist. Sei $(a,b) \in Y$, dh. $a \neq b$. Die beiden offenen Kugeln $U_r(a)$ und $U_r(b)$ mit Radius $r = \frac{1}{2}\ d(a,b)$ sind dann disjunkt. Zu zeigen ist dann, dass im Produktraum die offene Kugel mit Radius r um den Punkt (a,b) in Y liegt. Es ist aber $U_r(a,b) = U_r(a) \times U_r(b)$. Für jeden Punkt (x,y) gilt aber $x \neq y$, da die beiden Kugeln disjunkt sind, also $(x,y) \in Y$.

Aufgabe 5 (a) ist stetig.

(b) (i) ist stetig. Eine offensichtliche Wahl für die stetige Fortsetzung ist $f(0,0) = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle (x,y) mit $0 < ||(x,y)|| < \delta$ gilt

$$|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| < \epsilon.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass man $\delta = \epsilon$ wählen kann.

(ii) Betrachte etwa die beiden gegen $(0,0)$ konvergenten Folgen $x_n = (1/n, 0)$ und $y_n = (1/n, 1/n^2)$. Dann gilt $\lim g(x_n) = 0$ und $\lim g(y_n) = 1/2$. Widerspruch zu einer möglichen Fortsetzbarkeit von g in $(0,0)$.

Aufgabe 6 i) Die Konvergenz bezüglich d_2 impliziert die Konvergenz bezüglich d_1: Dies folgt aus der Abschätzung

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) max_{x \in [a,b]} \{|f_n(x) - f(x)|\}.$$

Denn das ist gleichbedeutend mit

$$d_1(f_n, f) \leq (b-a)d_2(f_n, f).$$

ii) Wir geben ein Gegenbeispiel an: Sei die Funktionenfolge f_n auf $[0,1]$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2-nx & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Bezüglich d_1 konvergiert sie gegen die Nullfunktion $f = 0$, da (kurze Rechnung) $d_1(f_n, f) = \frac{1}{n}$. Bezüglich d_2 konvergiert f_n aber nicht gegen Null (und damit gar nicht), da f_n an der Stelle $1/n$ sein Maximum mit Wert 1 annimmt, dh. es gilt $d_2(f_n, f) = f_n(1/n) - f(1/n) = 1$.

Aufgabe 7 Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := dist(x, Y) := inf_{y \in Y} d(x, y)$$

erfüllt die Bedingungen.

(i) f ist stetig: Für alle $y \in Y$ und $x, x' \in X$ gilt $d(x, Y) \leq d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$. Nimmt man nun das Infimum über alle $x \in X$ und vertauscht die Rolle von x und x', so folgt

$$|dist(x, Y) - dist(x', Y)| \leq d(x, x').$$

Das zeigt die (gleichmäßige) Stetigkeit von f.

(ii) Wir müssen noch zeigen, dass Y genau die Nullstellenmenge von f ist. Sei also $x \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen ist, ist das Komplement in X offen. Also existiert um x eine offene Kugel $U_\epsilon(x)$, die disjunkt zu Y ist. Also ist auch $dist(x, Y) \neq 0$.