Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 13

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 48 Schnitte senkrecht zur z-Achse ergeben Schnittflächen

$$M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le 1 - z^2,\ y^2 \le 1 - z^2\}.$$

Für $0 \le z \le 1$ sind das Quadrate mit der Seitenlänge $2\sqrt{1-z^2}$ und damit Flächeninhalt $vol(M_z) = 4(1-z^2)$. Für sonstige z sind die M_z leer. Daher erhält man

$$vol(M) = \int_0^1 vol(M_z)dz = \int_0^1 4(1-z^2)dz = \frac{8}{3}.$$

Aufgabe 49 Man transformiere auf Polarkoordinaten. Zu berechnen ist also der Limes

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{R} (r^2)^a r dr d\phi = \lim_{R\to\infty} \int_{r=1}^{R} r^{2a+1} dr.$$

Das Integral über die Potenzfunktion ist schon in der Ana 1 behandelt worden, siehe etwa Ana 1 Skript S.134. Das Integral ist endlich für $a < 1$ mit Wert $\frac{-\pi}{a+1}$.

Aufgabe 50 Zu berechnen ist der Limes

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} e^{-r} r dr d\phi.$$

Dieser berechnet sich sofort zu

$$2\pi \lim_{R\to\infty} [-e^{-r}(r+1)]_{r=0}^{R} = 2\pi.$$