Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 12

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 45 Man wende das Cavalierische Prinzip an. Schnitte senkrecht zur z-Achse ergeben

$$M_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq f(z)\}.$$

Für $a \leq z \leq b$ sind das Kreise und sonst leere Mengen. Also ist

$$vol(M) = \int_a^b vol(M_z)dz = \int_a^b \pi f^2(z)dz = \pi \int_a^b f^2(z)dz.$$

Mit $f : [-r,r] \to \mathbb{R},\ f(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$, ergibt sich daher

$$vol(K_r) = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - z^2 dz = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Aufgabe 46 Die Koordinatentransformation

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bildet die Einheitskugel K auf M ab. Da das Volumen der Einheitskugel schon bekannt ist und die Determinante der Transformation 1 ist, erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} vol(M) &= \int_M 1dy = \int_K 1\ |det(J(T,x))|dx \\ &= \int_K 1dx = vol(K) \\ &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Vorsicht: Folgende falsche Lösung liefert auch das richtige Ergebnis: Es handelt sich um eine verhunzte Anwendung des Cavalierischen Prinzips.

Man schneide M entlang von Ebenen senkrecht zum Vektor $(1,1,1)$: Als Schnitt nehme man

$$M_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z)^2 + (y+z)^2 + z^2 \leq 1,\ x+y+z = c\}$$

Das Volumen von M_c berechnet sich zu

$$vol(M_c) = vol(E_c) \text{ mit } E_c = \{(y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y+z)^2 + z^2 \leq 1 - c^2\}.$$

Danach berechnet man

$$vol(M) = \int_{c=-1}^{1} vol(M_c)dc.$$

Mit dieser Methode erhält man das richtige Ergebnis. Die Begründung ist aber nicht zulässig: Erstens gilt nicht $vol(M_c) = vol(E_c)$ und zweitens stimmt auch die Formel $vol(M) = \int_{c=-1}^{1} vol(M_c)dc$ nicht.

Aufgabe 47 (a) Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ auf der x_3-Achse, dh. es ist $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Das eindimensionale Integral für ξ_3 berechnet sich zu $\frac{3}{8}$, wobei wir $\mu = \frac{2\pi}{3}\rho_0$ eingesetzt haben.

(b) Rechnung in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_K e^{c(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{x_3=-1}^{1} \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{cr^2} r dr d\phi dx_3 \\ &= \ldots = \frac{2\pi}{c}(e^{cR^2} - 1). \end{aligned}$$

Für das Trägheitsmoment berechnet man

$$\begin{aligned}\theta(0,0) &= \int_K e^{c(x_1^2+x_2^2)}(x_1^2+x_2^2)dx_1dx_2dx_3\\ &= \int_{x_3=-1}^{1}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi} e^{cr^2}r^2 r dr d\phi dx_3\\ &= \ldots = \frac{2\pi}{c^2}(1+e^{cR^2}(cR^2-1)).\end{aligned}$$

(c) K_1 ist eine Kugel mit Radius 2, K_2 eine Kugelschale mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2, die Volumina sind also bekannt. Es ist

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \int_{K_1}\rho_1(x)dx = \rho_1 vol(K_1) = \frac{32\pi}{3}\rho_1,\\ \mu_2 &= \int_{K_2}\rho_2(x)dx = \rho_2 vol(K_2) = \frac{28\pi}{3}\rho_2.\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{7}{8}.$$