Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 11

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 41 Alle Funktionen sind stetig auf den kompakten Integrationsgebieten.

(a) Es gilt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}.$$

Mittels Fubini berechnet man

$$\int_D xy\ dxdy = \int_0^1 [\int_0^{1-x} xydy]dx = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}.$$

(b) $= \frac{1}{20}$.

(c)

$$\begin{aligned}\int_D \frac{2z}{(x+y)^2}\ dxdydz &= \int_1^2 [\int_2^3 [\frac{z^2}{(x+y)^2}]_0^3 dy]dx \\ &= \int_1^2 [\int_2^3 \frac{9}{(x+y)^2} dy]dx \\ &= 9\int_1^2 [-\frac{1}{x+y}]_2^3 dx \\ &= 9(-ln(5) + ln(4) + ln(4) - ln(3)) \\ &= 9ln(\frac{16}{15}).\end{aligned}$$

Aufgabe 43 (a) χ_M unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ M offen. Notation: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \chi_M(x) > C\} =: X_C$.

$\Leftarrow$: Im Fall $C > 1$ ist die Menge X_C leer, also offen. Für $0 \leq C < 1$ ist $X_C = M$, also offen. Für $-\infty < C < 0$ ist $X_C = \mathbb{R}^n$, also offen.

$\Rightarrow$: Wäre M nicht offen, so existiert ein $x' \in \partial M$ mit $x' \in M$, also $\chi_M(x') = 1$. Sei $0 < C < 1$. In jeder Umgebung von x' liegen aber Elemente aus M und dem Komplement, also nimmt χ_M in jeder noch so kleinen Umgebung von x' sowohl den Wert 0 als auch den Wert 1 an. Dann kann X_C nicht offen sein.

(b) Ähnlich und ähnlich langweilig.

Aufgabe 44 (a) Die Stetigkeit bedeutet: $\forall x \in X$ und $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon \ \forall y \in U_\delta(x).$$

Man prüft sofort nach, dass dies äquivalent zu den beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} &f(y) > f(x) - \epsilon \\ &-f(y) > -f(x) - \epsilon \end{aligned}$$

ist. Das impliziert sofort die Unterhalbstetigekeit von f und $-f$. Ist umgekehrt f unterhalbstetig, so findet man für vorgegebene x und $\epsilon > 0$ ein $\delta_+ > 0$, so dass die erste Ungleichung

$$f(y) > f(x) - \epsilon$$

für alle $y \in U_{\delta_+}(x)$ erfüllt ist. Dito findet man wegen der Unterhalbstetigkeit von $-f$ ein δ_-, so dass die zweite Ungleichung

$$-f(y) > -f(x) - \epsilon$$

für alle $y \in U_{\delta_-}(x)$ erfüllt ist. Setze nun $\delta = min(\delta_+, \delta_-)$. Dann sind beide Ungleichungen für alle $y \in U_\delta(x)$ erfüllt, f ist also stetig.

(b) Da $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq B_b^{\pm}(\mathbb{R}^n)$ gilt, ist die eine Inklusion klar.

Sei nun $f \in B_b^+(\mathbb{R}^n) \cap B_b^-(\mathbb{R}^n)$. Dann ist der Träger von f beschränkt. Wir zeigen, dass f stetig ist. Wegen Teil (a) folgt dies aus folgender Behauptung:

Behauptung: Sei $f \in B_b^+(\mathbb{R}^n)$. Dann ist f unterhalbstetig.

Beweis: Zu zeigen ist: $\forall C \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(C,\infty)$ offen in $\mathbb{R}^n$. Da $f \in B_b^+(\mathbb{R}^n)$ existiert eine Folge $f_n \nearrow f,\ f_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(C,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in (C,\infty)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid lim\ f_n(x) = f(x) \in (C,\infty)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (C,\infty) \text{ enthält fast alle } f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie der Folge ist das

$$\begin{aligned} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \in (C,\infty)\} \\ &= \bigcup_n \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_n(x) \in (C,\infty)\} \\ &= \bigcup f_n^{-1}(C,\infty). \end{aligned}$$

Da f_n unterhalbstetig ist und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen offen ist, folgt die Unterhalbstetigkeit von f.