Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 10

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 37 (a) Es soll die Funktion $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$ unter der Nebenbedingung $a+b+c = 90$ minimiert werden. Diese Aufgabe kann auch mit Lagrange Multiplikatoren gelöst werden. Hier eine andere Methode.

Eliminiere die Variable c, indem man $c = 90 - a - b$ in f einsetzt. Man erhält die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(a,b) = a^2 + b^2 + (90 - a - b)^2$. Wir berechnen die kritischen Punkte von F. Die Bedingung $\nabla F(a,b) = 0$ führt auf $a = b = 90 - a - b = c$. Wegen $a + b + c = 90$ ist der einzige kritische Punkt $(a,b,c) = (30,30,30)$. Die Hessematrix ist in diesem Punkt positiv definit, also liegt dort ein lokales Minimum vor.

Wir suchen ein globales Minimum. A priori ist nicht klar, dass das gefundene lokale Minimum ein globales Minimum ist, denn es könnte ja gar kein globales Minimum geben: Die durch die Nebenbedingung definierte Ebene ist ja nicht kompakt. Trotzdem sieht man durch Einsetzen von großen Werten sofort, dass f tatsächlich in dem Punkt ein globales Minimum hat: Es gilt $f(30,30,30) = 2700$; andererseits nimmt f für Punkte außerhalb einer kompakten Kugel mit genügend großem Radius um 0 nur Funktionswerte > 2700 an.

(b) Lösung: $(20,20,20)$

Aufgabe 38 Minimiert werden soll die Funktion $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2},$$

unter der Nebenbedingung $z = x^2 + y^2$. Via Lagrange Multiplikatoren usw findet man

$$(x, y, z) = (\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}).$$

als einziges lokales Minimum. Das ist tatsächlich ein globales Minimum: $M := \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}$ ist abgeschlossen, also ist $N := M \cap \overline{U}_s(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ kompakt (s genügend groß). Also hat f eingeschränkt auf diese Menge N als stetige Funktion ein Minimum. Der einzige Kandidat dafür ist $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$. Da aber $min(f|M) = min(f|N)$, ist unser lokales Minimum tatsächlich auch das globale Minimum.

Aufgabe 39 Allgemein lautet die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ um den Punkt (a, b)

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \\ & (\partial_x f(a, b), \partial_y f(a, b)) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \\ & (x - a, y - b) \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(a, b) & \partial_{xy} f(a, b) \\ \partial_{xy} f(a, b) & \partial_{yy} f(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rechnet man alle partiellen Ableitungen unserer Funktion aus und setzt für $(x, y) = (1, 1)$ ein und faßt zusammen, so erhält man

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{1}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{4}(y - 1)^2.$$

Ausmultipliziert ergibt sich

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2.$$

Aufgabe 40 Bei dieser Aufgabe handelt es sich um einen Spezialfall des berühmten Maximumsprinzip für harmonische Funktionen.

(a) Angenommen, die Aussage ist falsch: Es gibt also ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \geq max_{||y||=1} f(y)$. f ist stetig auf dem Kompaktum $\overline{D}$, also nimmt f dort sein Supremum an, also existiert ein $x \in \overline{D}$, so dass $f(x) = sup_{y \in \overline{D}} f(y)$. Fallunterscheidung: Fall 1): $f(x) = f(x_0)$, dann wähle $x = x_0$, also $x \in D$. Fall 2):

$f(x) > f(x_0)$, dann $f(x) > f(x_0) \geq sup_{||y||=1} f(y)$, also wieder $x \in D$. Also liegt x immer in D. Behauptung: Es ist $\nabla f(x) = 0$ und die Hessematrix

$$H = \frac{\partial^2 f}{\partial_i \partial j}(x)$$

ist negativ semidefinit. Vorsicht: Aus der Existenz eines Maximums kann man i.A. nicht folgern, dass die Hessematrix negativ definit ist. Es gilt aber immer, dass daraus folgt, dass die Hessematrix immerhin semidefinit ist. Das wird hier benutzt. Es kann zum Beispiel aus der Taylorreihe abgelesen werden. Insbesondere ist die Spur von $A \leq 0$, also $\Delta f(x) \leq 0$. Widerspruch.

(b) Wir zeigen, dass $f(x) \leq max_{||y||=1} f(y)$ für alle $x \in D$. Die andere Aussage folgt analog, indem man $-f$ betrachtet. Sei $\epsilon > 0$. Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := f(x) + \epsilon(\sum_{i=1}^{n} x_i^2).$$

Es gilt $\Delta g = \Delta f + 2n\epsilon$, also ist $\Delta g > 0$ auf D. Nach Aufgabenteil (a) folgt somit

$$g(x) < max_{||y||=1} g(y),$$

also

$$f(x) + \epsilon(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) < max_{||y||=1} f(y) + \epsilon(max_{||y||=1} \sum_{i=1}^{n} y_i^2).$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\epsilon > 0$. Indem man ϵ gegen Null gehen läßt, sieht man

$$f(x) \leq max_{||y||=1} f(y).$$