Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis II SS 2009

Lösungshinweise Blatt 1

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 2 (a) $(\overline{A})^\circ = A^\circ$ ist i.A. falsch. Gegenbeispiele sind etwa $A = \mathbb{Q}^n$ oder $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$.

(b) $\overline{A^\circ} = \overline{A}$ ist i.A. falsch, man nehme etwa wieder $\mathbb{Q}^n$.

(c) Das ist korrekt.

(d) $A^\circ \cup B^\circ$ ist falsch, man nehme etwa $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$.

(e) Das ist i.A. falsch, ein Gegenbeispiel ist etwa $A = \{c \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$.

(f) Das ist korrekt.

Aufgabe 3 (a) Die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag impliziert:

$$|x(i) - y(i)| \quad \leq \quad |x(i) - z(i)| + |z(i) - y(i)| \qquad \text{für } i = 1, 2 \ldots, n$$

Aufsummieren:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)| \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} |x(i) - z(i)| + \sum_{i=1}^{n} |z(i) - y(i)| \\ &= \quad d_1(x, z) + d_1(z, y). \end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung für vorgegebene x, y, z bezüglich der Abstandsfunktion d_∞ zu zeigen, sei j der Index (bzw. einer der Indizes), für den

$d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le n} |x(i) - y(i)| = |x(j) - y(j)|$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$d_\infty(x,y) = |x(j) - y(j)| \le |x(j) - z(j)| + |z(j) - y(j)| \le$$

$$\max_{1\le i\le n} |x(i) - z(i)| + \max_{1\le i\le n} |z(i) - y(i)| = d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y).$$

$\square$

(b) Ist j wie in Teil (a) gewählt, so folgt:

$$d_\infty(x,y) = |x(j) - y(j)| = \sqrt{|x(j) - y(j)|^2}$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|^2} = d_2(x,y)$$

Die mittlere Ungleichung $d_2(x,y) \le d_1(x,y)$ folgt aus der folgenden Abschätzung:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \quad \le \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Wegen der strengen Monotonie der Quadratwurzelfunktion folgt diese Ungleichung aus:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \quad \le \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2.$$

Das ist aber eine wahre Ungleichung, denn die rechte Seite ist die Summe aus der linken Seite und aus der nichtnegativen Summe $\sum_{i\ne j} |a_i| \cdot |a_j|$.

Die rechte Ungleichung folgt jetzt so:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)| \le \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le j\le n} |x(j) - y(j)| = \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x,y) = n \cdot d_\infty(x,y).$$

(c) Wir zeigen für ein Element $x \in \mathbb{R}^n$ und für eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ bezüglich der Metrik d_∞;

(ii) $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ bezüglich der Metrik d_1;

(iii) $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ bezüglich der Metrik d_2.

Aus (i) folgt (ii): Für vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es wegen (i) ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq N_0$ gilt: $d_\infty(x_j, x) < \frac{\epsilon}{n}$. Für diese j gilt dann aber nach (b): $d_1(x_j, x) \leq n \cdot d_\infty(x_j, x) < n \cdot \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$. Daraus folgt sofort (ii).

Aus (ii) folgt (iii): Für vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es wegen (ii) ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq N_0$ gilt: $d_1(x_j, x) < \epsilon$. Für diese j gilt dann aber nach (b): $d_2(x_j, x) \leq d_1(x_j, x) < \epsilon$. Daraus folgt sofort (iii).

Aus (iii) folgt (i): Für vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es wegen (iii) ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq N_0$ gilt: $d_2(x_j, x) < \epsilon$. Für diese j gilt dann aber nach (b): $d_\infty(x_j, x) \leq d_2(x_j, x) < \epsilon$. Daraus folgt sofort (i).

(d) Zu konstruieren ist eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich d_2 gegen 0 konvergiert, aber bezüglich der Hammingmetrik d_H keine Nullfolge ist.

Wir können z.B. $x_j = \left(\frac{1}{j+1}, \ldots, \frac{1}{j+1}\right)$ wählen. Dann gilt $d_\infty(x_j, 0) = \frac{1}{j+1}$. Da $\frac{1}{j+1}$ eine Nullfolge ist, konvergiert x_j bezüglich der Metrik d_∞ gegen 0. Nach (b) konvergiert x_j dann auch bezüglich d_2 gegen 0.

Andererseits gilt $d_H(x_j, 0) = n$. Das heißt für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein N_0 mit $d_H(x_j, 0) < \epsilon$ für alle $j \geq N_0$.