

Darstellungen p -adischer Liegruppen

Seminar (M.Sc. Mathematik)

Sommersemester 2018

Prof. Dr. R. Weissauer
Dr. M. Rösner

mittwochs 14:15–16:00, Seminarraum 3, INF 205

Für einen p -adischen Körper k/\mathbb{Q}_p und eine algebraische Gruppe über k kann man die Gruppe der k -wertigen Punkte mit der p -adischen Topologie versehen, das liefert eine p -adische Liegruppe G . Eine Darstellung von G ist ein Gruppenhomomorphismus von G in die Automorphismengruppe eines (z.B. komplexen) Vektorraums. Man nennt eine Darstellung glatt, wenn jeder Punkt im Vektorraum von einer offenen Untergruppe in G stabilisiert wird. Solche Darstellungen kodieren interessante Informationen.

Anwendungen finden sich in zahlreichen Gebieten der Mathematik: In der lokalen Langlands-Korrespondenz beispielsweise vergleicht man Darstellungen p -adischer Liegruppen mit gewissen Darstellungen der Weil-Gruppe von k ; beide Gruppen tragen dabei eine lokal proendliche Topologie. Ein anderes Beispiel ist die Anwendung auf die Theorie automorpher Darstellungen; die Ramanujan-Vermutung lässt sich als Eigenschaft gewisser p -adischer Darstellungen formulieren.

Im ersten Teil des Seminars erarbeiten wir uns die Grundlagen der Darstellungstheorie nach [BZ76], [C79] und Kapitel 4 von [B98]. Als Standardbeispiel dient uns dabei die lineare Gruppe $GL(n, k)$. Im zweiten Teil behandeln wir die Klassifikation nicht-cuspidaler irreduzibler Darstellungen von $GL(n, k)$ nach Bernstein und Zelevinski [BZ77].

1. Anmeldung und Vortragsvergabe: per email mroesner@mathi.uni-heidelberg.de oder in meiner Sprechstunde dienstags 13 Uhr in Zimmer 3.332, INF 205.
2. Bitte melden Sie sich (selbstständig!) spätestens drei Wochen vor Ihrem Vortrag, um etwaige Fragen zu klären und Schwerpunkte festzulegen.
3. Ihr Tafelvortrag sollte nicht länger als 90 Minuten sein, damit im Anschluss Zeit für eine kurze Diskussion bleibt. Versuchen Sie, die wesentlichen Konzepte klar herauszuarbeiten und an Beispielen zu illustrieren.
4. Bei erfolgreichem Vortrag und regelmäßiger Teilnahme: 6 Leistungspunkte.

www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/Seminar_SoSe18/

- Vortrag 1 ℓ -Gruppen, ℓ -Garben, Distributionen
[BZ76, §1.1–1.17], siehe auch [B98, §4.2–4.3] 18. April
- Vortrag 2 Haar-Maß, Modulus-Charakter, Hecke-Algebra
[BZ76, §1.18–1.30] siehe auch [B98, §4.3] 25. April
- Vortrag 3 Glatte und zulässige Darstellungen, Lemma von Schur, Charaktere, Hecke-Moduln,
Jordan-Hölder-Reihe, Beispiele
[BZ76, §2.1–2.20] [BZ77, §1.1–1.7], siehe auch [B98, §4.2], [C79] 2. Mai
- Vortrag 4 Induktion, Restriktion, (Co-)Invarianten, Tensorprodukt, Kontragrediente, Twist, Frobenius-
Dualität, Exaktheit, Transitivität der Induktion
[BZ76, §2.21–2.34] [BZ77, §1.8–1.11], siehe auch [C79] 9. Mai
- Vortrag 5 Parabolische Untergruppen, Iwasawa-Zerlegung, parabolische Induktion, Jacquet-Funktor,
Beispiel $GL(n, k)$ mit \times -Notation
[BZ77, §2.1–2.5, §6], [BZ76, §3.1–3.17] 16. Mai
- Vortrag 6 (Super-)cuspidale Darstellungen, cuspidaler Träger
[BZ76, §3.20–3.30], [BZ77, §2.4–2.5] 23. Mai
- Vortrag 7 Weyl-Gruppe, Länge, Thm. 2.9 in [BZ77]
[BZ77, 2.6–2.17, §6], [BZ76, §3.18–3.30] 30. Mai
- Vortrag 8 Affin lineare Gruppen P_n , Funktoren Φ^\pm, Ψ^\pm , Adjungiertheit und Ausschneidungssequenz,
Beweis via ℓ -Garben in [BZ76]
[BZ77, §3.1–3.3], [BZ76, §5.1–5.14] 6. Juni
- Vortrag 9 ¹ Irreduzible Darstellungen von P_n , χ -Paare
[BZ77, §3.4–3.9] 13. Juni
- Vortrag 10 Parabolisch induzierte Darstellungen von G_n , Irreduzibilitätskriterium
[BZ77, §4.1–§4.4, §4.7–4.8] 20. Juni
- Vortrag 11 Whittakermodell und Kirillovmodell für irreduzible Darstellungen von $GL(n, k)$ (Theorem
4.13 ohne Beweis)
[BZ77, §4.9–§4.15] 27. Juni

Literatur

- [BZ76] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinski, *Representations of the group $GL(n, F)$ where F is a non-archimedean local field*. Russ. Math. Surveys 31:3:1-68 (1976).
- [BZ77] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinski, *Induced representations of \mathfrak{p} -adic groups. I*. Annales scientifiques de l'É.N.S. 10(4):441–472 (1977).
- [B98] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies, vol. 55 (1998).
- [C79] P. Cartier, *Representations of \mathfrak{p} -adic groups: A survey*. Proc. Symp. Pure Math., 33(1):111–155 (1979).

¹Kann auch gekürzt und mit Vortrag 8 zusammengelegt werden.