Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker III **Blatt 9**

Prof. Dr. R. Weissauer
Mirko Rösner

Wintersemester 2014
Abgabe bis 19.12.14 um 11:15 in den Übungskästen in INF 288

---

1. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist die "naive" Fouriertransformierte

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi ixy) f(x) \mathrm{d}x$$

eine wohldefinierte stetige Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von $f = \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ explizit und folgern Sie aus einer früheren Aufgabe, dass $\hat{f}$ nicht in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt.
Hinweis zu b): Bestimmen Sie den Realteil von $\hat{f}$.

2. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ Schwartz-Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Faltung $(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y - x)g(x)\mathrm{d}x$ ist wohldefiniert und wieder eine Schwartz-Funktion $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b) Für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{F}f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(2\pi ixy)\mathrm{d}x$$

gilt die Produktregel $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$.

3. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Legendre-Polynome $P_n \in \mathbb{R}[x]$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - x)^n.$$

Zeigen Sie:

(a) $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C} \cdot P_n = \mathbb{C}[x]$ ist der Raum der komplexen Polynome in einer Variablen,

(b) die Polynome P_n sind paarweise orthogonal in $L^2([0, 1])$,

(c) es gilt $\|P_n\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

(d) die $[\sqrt{2n + 1} \cdot P_n]$ bilden eine Hilbertraumbasis von $L^2([0, 1])$.

Hinweise: Das Polynom P_n hat Grad n (warum?). Verwenden Sie für d) den Satz von Stone-Weierstraß.