Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 5
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 23.11.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3`

---

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit den Koeffizienten:
   (i) $a_k := k^2 \in \mathbb{C}$, (1P)
   (ii) $a_k := \exp(-k) \in \mathbb{C}$, (1P)
   (iii) $a_k := \frac{k^k}{k!} \in \mathbb{C}$ für $k \geq 1$ und $a_0 = 0 \in \mathbb{C}$, (1,5P)
   (iv) $a_k := \cos(k) \in \mathbb{C}$. (1,5P)
   (v) Konvergiert die Potenzreihe im Fall (iii) in $z = 1/e = 0.367879\ldots$? (1P)

2. Bestimmen Sie durch einen Potenzreihenansatz[1] eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(z) = 3f(z) + 2$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe? (4P)

3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und sei $r \in \mathbb{R}$ reell mit $|a| < r < |b|$. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ natürliche Zahlen und sei $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\alpha(t) := r \exp(2\pi i t)$.

   Berechnen Sie das Integral
   $$\oint_\alpha \frac{1}{(z-a)^m (z-b)^n} \mathrm{d}z.$$
   Tipp: Verwenden Sie die Cauchy-Integralformel für höhere Ableitungen. (4P)

4. Bestimmen Sie alle analytischen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} f(z) + f(z) = 0$.
   Tipp: Potenzreihenansatz. (4P)

---

[1] Das bedeutet: Nehmen Sie an, f lässt sich als konvergente Potenzreihe schreiben und bestimmen Sie die Koeffizienten.