Übungen zu Automorphe Formen Sommersemester 2017

Dr. Mirko Rösner Blatt 6 (Abgabe freiwillig)

Sei G Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und maximal kompakter Untergruppe K. Ein Morphismus von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln $V \to W$ ist eine komplex lineare Abbildung $f : V \to W$, die $f(Xv) = Xf(v)$ für $X \in \mathfrak{g}$ und $f(kv) = kf(v)$ für $k \in K$ erfüllt. Diese Morphismen bilden einen komplexen Vektorraum $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(V, W)$.

1. Aufgabe: Sei (ρ, V) irreduzible zulässige Darstellung von $G = \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$.

(a) Es gibt einen stetigen Charakter[1] $\omega_\rho : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$, sodass

$$\rho \begin{pmatrix} u & \\ & u \end{pmatrix} v = \omega(u)v \quad \forall v \in V.$$

(b) Für $t \in \mathbb{C}$ ist der Twist (ρ_t, V) mit $\rho_t(g) = \det(g)^t \rho(g)$ auch eine irreduzible zulässige Darstellung.

(c) Es gibt $t \in \mathbb{C}$ sodass $\omega_{\rho_t} = 1$.

2. Aufgabe: Sei $V = \mathbb{C}[x_1, x_2]_m$ der Vektorraum homogener Polynome vom Grad m. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ operiert darauf durch

$$\rho(g)f(x_1, x_2) = f((x_1, x_2)g)$$

und definiert eine Darstellung (ρ, V). Bestimmen Sie den zentralen Charakter und die K-Typen.
Hinweis: Betrachten Sie $f_j \in V$ für $f_j(x_1, x_2) = (x_1 - ix_2)^j (x_1 + ix_2)^{m-j}$ und $0 \leq j \leq m$.

3. Aufgabe: (Schur's Lemma für $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln) Seien V, W zwei irreduzible zulässige $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln. Wir möchten zeigen

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(V, W) \leq 1 \ .$$

(a) Wenn V und W nicht isomorph sind, dann ist jeder Morphismus $f : V \to W$ gleich Null. Wir können daher annehmen (oBdA) $V = W$.

(b) Für jede irreduzible Darstellung τ von K gilt $f(V(\tau)) \subseteq V(\tau)$.

(c) Für $V(\tau) \neq 0$ hat die Einschränkung von f auf $V(\tau)$ einen Eigenwert μ.

(d) $\ker(f - \mu\, \mathrm{id}_V)$ ist ein $(\mathfrak{g}, K)$-Untermodul, also gleich V.

---

[1] Man nennt ω_ρ den zentralen Charakter von ρ.