Übungen zu Automorphe Formen Sommersemester 2017

Dr. Mirko Rösner Blatt 5 (Abgabe freiwillig)

---

1. Aufgabe: Für jedes $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ gibt es eindeutige $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $0 \leq \theta < 2\pi$ sodass

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

2. Aufgabe: Sei $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ die spezielle orthogonale Gruppe. Die n-fache symmetrische Potenz der natürliche Darstellung

$$\mathrm{SO}(2) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)) , \qquad g \mapsto \mathrm{Sym}^n(g)$$

operiert auf dem symmetrischen Tensorprodukt $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$. Zerlegen Sie diese Darstellung in irreduzible Unterdarstellungen. Hinweis: Geben Sie eine geeignete Basis an.

3. Aufgabe: Zu einer elliptischen Modulform f vom Gewicht k zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ gehört die automorphe Form $g \mapsto \phi_f(g) = f|_k g(i) = j(g,i)^{-k} f(g\langle i \rangle)$.
Zeigen Sie: f ist Spitzenform genau dann wenn

$$\int_0^1 \phi_f(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g)\mathrm{d}x = 0$$

für alle $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.