Übungen zu Automorphe Formen Sommersemester 2017

Dr. Mirko Rösner Blatt 4 (Abgabe freiwillig)

Darstellungen sind immer komplex linear.

1. Aufgabe: Sei G eine endliche Gruppe.

(a) Zu einer endlich-dimensionalen Darstellung (ρ, V) von G ist die duale Darstellung $(\rho^\vee, V^*)$ gegeben auf dem dualen Vektorraum V^* durch

$$\rho^\vee(g)(v^*) = (v \mapsto v^*(\rho(g^{-1})v) \qquad v \in V,\ v^* \in V^*\,.$$

Zeigen Sie: Der Charakter der dualen Darstellung ist $\chi_{\rho^\vee} = \overline{\chi_\rho}$.

(b) Bestimmen Sie den Charakter der induzierten Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbf{1}_H)$ für die triviale Untergruppe $H = \{1\}$.

2. Aufgabe: Sei $B = \{\left(\begin{smallmatrix} r & t \\ & s \end{smallmatrix}\right) \mid r, s \in \mathbb{R}^\times, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Liegruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Die Gruppenverknüpfung ist gegeben durch Matrixmultiplikation. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in C_c(B)$ ist ein linksinvariantes Haar-Integral gegeben durch

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^\times} \int_{\mathbb{R}^\times} f\left(\begin{pmatrix} r & t \\ & s \end{pmatrix}\right) \frac{\mathrm{d}r\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t}{r^2 s}\,.$$

(b) Berechnen Sie den Modulus-Charakter $\delta_B(g) = I(f \circ R_g)/I(f)$ für die Rechtstranslation $R_g : x \mapsto xg$ mit $g \in B$.

3. Aufgabe: Sei (ρ, H) eine unitäre Darstellung einer Liegruppe G auf einem komplexen Hilbertraum H. Zeigen Sie:

(a) Wird ein abgeschlossener Unterraum $W \subseteq H$ von ρ in sich abgebildet, dann auch das Orthokomplement $W^\perp$.

(b) Die Einschränkung von ρ auf W oder $W^\perp$ definiert je eine unitäre Unterdarstellung.

(c) (ρ, V) zerfällt als direkte Summe $(\rho, H) \cong (\rho|_W, W) \oplus (\rho|_{W^\perp}, W^\perp)$.