Übungen zu Automorphe Formen Sommersemester 2017

Dr. Mirko Rösner Blatt 3 (Abgabe freiwillig)

Sei G eine endliche Gruppe. Darstellungen von G sind immer komplex linear und endlichdimensional.

1. Aufgabe: Sei $f : (\rho_1, V_1) \to (\rho_2, V_2)$ ein Morphismus (Verkettungsoperator) zwischen Darstellungen von G. Zeigen Sie: $\ker(f)$ ist eine Unterdarstellung von (ρ_1, V_1).

2. Aufgabe: Sei $\mathfrak{S}_3$ die Permutationsgruppe von drei Elementen. Die natürliche Darstellung (ρ, V) operiert auf $V = \mathbb{C}^3$ durch Permutation der Einträge: $\rho(\sigma)(z_1, z_2, z_3) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)})$ für $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. Berechnen Sie den Charakter der natürlichen Darstellung. Können Sie die irreduziblen Unterdarstellungen konkret angeben?

3. Aufgabe: Sei (ρ, V) eine Darstellung von G.

(a) Es gibt ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V, welches von ρ erhalten wird. Das bedeutet $\rho(g)$ ist unitär für alle $g \in G$.

(b) Folgern Sie für den Charakter $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ für alle $g \in G$.

4. Aufgabe: Die Darstellung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \qquad n \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht isomorph zu einer direkten Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.
Hinweis: Finden Sie eine irreduzible Unterdarstellung und bestimmen Sie die zugehörige Quotientendarstellung.

5. Aufgabe: Sei G abelsch und (ρ, V) eine irreduzible Darstellung von G. Zeigen Sie $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Schur.

6. Aufgabe: Der Gruppenring $\mathbb{C}G = \oplus_{x \in G} \mathbb{C} e_x$ wird als Vektorraum erzeugt von formalen Symbolen e_x für $x \in G$. Die Multiplikation ist gegeben durch $e_x e_y = e_{xy}$ für $x, y \in G$. Die reguläre Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}G)$ operiert durch $\rho(g) e_x = e_{gx}$.

(a) Bestimmen Sie den Charakter χ_ρ.

(b) Zeigen Sie: Jede irreduzible Darstellung (ρ_i, W_i) ist in der regulären Darstellung enthalten mit Vielfachheit $\dim W_i$.

(c) Folgern Sie $\sum_i (\dim W_i)^2 = \#G$ für die Summe über alle irreduziblen Darstellungen (ρ_i, W_i).

7. Aufgabe: Bestimmen Sie alle irreduziblen Charaktere von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ oder einer anderen endlichen Gruppe Ihrer Wahl.