Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ operieren auf $C^\infty(\mathbb{H}, \mathbb{C})$ die Maaßschen Differentialoperatoren

$$R_k = iy\partial_x + y\partial_y + \frac{k}{2}, \qquad L_k = -iy\partial_x + y\partial_y - \frac{k}{2}.$$

und der nichteuklidische Laplace-Operator $\Delta_k^{\mathrm{ne}} = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) + iky\partial_x$ vom Gewicht k.

1. Aufgabe: Zeigen Sie für $f \in C^\infty(\mathbb{H}, \mathbb{C})$:

$$\Delta_k^{\mathrm{ne}} f = -L_{k+2} \circ R_k(f) - \tfrac{k}{2}(1 + \tfrac{k}{2})f = -R_{k-2} \circ L_k(f) + \tfrac{k}{2}(1 - \tfrac{k}{2})f$$

und folgern Sie $\Delta_{k+2}^{\mathrm{ne}} \circ R_k = R_k \circ \Delta_k^{\mathrm{ne}}$.

2. Aufgabe: Der modifizierte Peterson-Operator

$$(f\|_k\, g)(z) = \left(\frac{j(g,z)}{|j(g,z)|}\right)^{-k} f(g\langle z\rangle)$$

definiert eine Rechtsoperation von $g \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ auf $f \in C^\infty(\mathbb{H}, \mathbb{C})$. Zeigen Sie

$$(R_k f)\|_{k+2}\, g = R_k(f\|_k\, g) \qquad \text{und} \qquad (L_k f)\|_{k-2}\, g) = L_k(f\|_k\, g)\,.$$

Folgern Sie $\Delta_k^{\mathrm{ne}}(f\|_k\, g) = (\Delta_k^{\mathrm{ne}} f)\|_k\, g$ mit Aufgabe 1. Folgern Sie, dass R_k eine Maaßform vom Gewicht k entweder auf Null oder auf eine Maaßform vom Gewicht $k + 2$ abbildet.

3. Aufgabe: Für eine Modulform $0 \neq f \in M_k(\Gamma)$ zur Kongruenzgruppe Γ vom Gewicht $k \geq 0$ sei $\phi_f(z) = y^{k/2} f(z)$. Zeigen Sie:

(a) $L_k(\phi_f) = 0$,

(b) $\Delta_k^{\mathrm{ne}}(\phi_f) = \frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})\phi_f$,

(c) ϕ_f ist eine Maaßform vom Gewicht k und Charakter $\chi = 1$.

4. Aufgabe: Sei $\phi \neq 0$ eine Spitzen-Maaßform vom Gewicht k zu einer Kongruenzgruppe Γ mit $\Delta_k^{\mathrm{ne}}(\phi) = \lambda\phi$ für eine komplexe Zahl λ. Zeigen Sie:

(a) Für $k = 1$ ist λ reell und es gilt $\lambda \geq 1/4$.

(b) Sei $k \geq 0$ beliebig. Es gilt dann $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder $\lambda = \frac{l}{2}(1 - \frac{l}{2})$ für ein ganzzahliges $1 \leq l \leq k$ mit $l \equiv k \pmod 2$.

Hinweis zu b): Unterscheiden Sie die Fälle $L_k(\phi) = 0$ und $L_k(\phi) \neq 0$.