Übungen zu Automorphe Formen Sommersemester 2017

Dr. Mirko Rösner Blatt 1 (Abgabe freiwillig)

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$.

1. Aufgabe: Der eindimensionale komplex projektive Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2 \backslash \{0\})/\Delta(\mathbb{C}^\times)$ mit der diagonalen Einbettung $\Delta : z \mapsto (z, z) \in \mathbb{C}^2$ ist eine Riemannsche Fläche. Die Elemente bezeichnen wir mit $(z_1 : z_2) = \{(\lambda z_1, \lambda z_2)\ , \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$.

(a) Die Operation von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{C}^2$ durch Matrixmultiplikation liefert eine wohldefinierte Operation auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

(b) Das Bild der Einbettung $\mathbb{H} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch $z \mapsto (z : 1)$ wird von $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ erhalten. Welche Operation induziert das auf $\mathbb{H}$?

2. Aufgabe: Für $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{H}$ ist die Möbius-Transformation $g \langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$ und das automorphe Symbol $j(g, z) = (cz + d)(\det\, g)^{-1/2}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der holomorphen Funktion $z \mapsto g \langle z \rangle$,

(b) zeigen Sie $j(g_1 g_2, z) = j(g_1, g_2 \langle z \rangle) j(g_2, z)$ mit der Kettenregel,

(c) zeigen Sie $\mathrm{Im}(g \langle z \rangle) = \mathrm{Im}(z)\ |j(g, z)|^{-2}$.

3. Aufgabe: (a) Es gibt einen Gruppenisomorphismus

$$p : \Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\ , \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto d + N\mathbb{Z}\ .$$

(b) Für $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ wähle $\alpha \in \Gamma_0(N)$ mit $p(\alpha) = d$. Dann ist der Diamant-Operator

$$\langle d \rangle : M_k(\Gamma_1(N)) \to M_k(\Gamma_1(N))\ ,\ f \mapsto f|_k\, \alpha$$

wohldefiniert, also unabhängig von der konkreten Wahl des α.

(c) Der Diamant-Operator ist multiplikativ $\langle d \rangle \circ \langle d' \rangle = \langle dd' \rangle$.

(d) Der Diamant-Operator $\langle d \rangle$ erhält das Petersson-Skalarprodukt auf $S_k(\Gamma_1(N))$, ist also unitär.

4. Aufgabe: Sei $f \in M_0(\Gamma)$ eine Modulform vom Gewicht Null zu einer Kongruenzgruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie: f ist konstant.